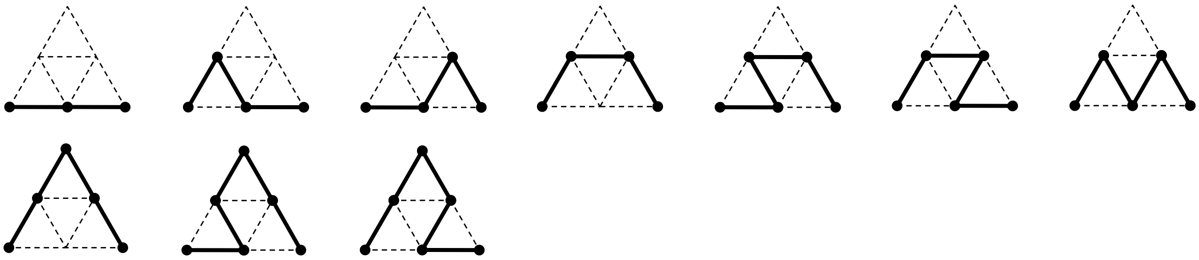
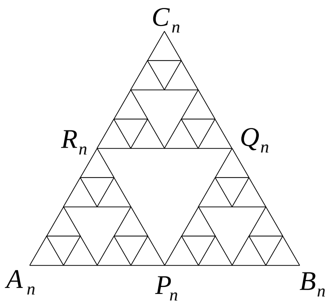
1990 年東大理後期 $\boxed{3}$

(1)

下図の通り、すべて描き出すと　$\therefore x_2=7,\ y_2=3$ ……(答)



(2)



A_nB_n, B_nC_n, C_nA_n の中点をそれぞれ P_n, Q_n, R_n とおく。

A_n から B_n に至る経路は P_n, Q_n, R_n のいずれかを必ず通る。

P_n, Q_n, R_n のうちのどこをどの順序で通るかで場合分けすると、

以下のパターンが考えられる。

途中 C_n を通らない場合

① $A_n\to P_n\to B_n$　② $A_n\to R_n\to P_n\to B_n$　③ $A_n\to P_n\to Q_n\to B_n$　④ $A_n\to R_n\to Q_n\to B_n$

⑤ $A_n\to P_n\to R_n\to Q_n\to B_n$　⑥ $A_n\to R_n\to Q_n\to P_n\to B_n$　⑦ $A_n\to R_n\to P_n\to Q_n\to B_n$

途中 C_n を通る場合

⑧ $A_n\to R_n\to C_n\to Q_n\to B_n$　⑨ $A_n\to P_n\to R_n\to C_n\to Q_n\to B_n$　⑩ $A_n\to R_n\to C_n\to Q_n\to P_n\to B_n$

A_{n+1} から C_{n+1} を通らず B_{n+1} に至る経路の個数を考える。

①の場合の個数

A_{n+1} から R_{n+1} を通らず P_{n+1} に至る経路の個数、P_{n+1} から Q_{n+1} を通らず B_{n+1} に至る経路の個数は、

ともに x_n に等しいから　$\therefore {x_n}^2$

②の場合の個数

A_{n+1} から R_{n+1} を通り P_{n+1} に至る経路の個数、P_{n+1} から Q_{n+1} を通らず B_{n+1} に至る経路の個数は、

それぞれ y_n, x_n に等しいから　$\therefore x_ny_n$

③の場合の個数　②と同様に　$\therefore x_ny_n$

④の場合の個数

A_{n+1} から P_{n+1} を通らず R_{n+1} に至る経路の個数、R_{n+1} から C_{n+1} を通らず Q_{n+1} に至る経路の個数、

Q_{n+1} から P_{n+1} を通らず B_{n+1} に至る経路の個数はいずれも x_n に等しいから　$\therefore {x_n}^3$

⑤の場合の個数

A_{n+1} から P_{n+1} を通り R_{n+1} に至る経路の個数、R_{n+1} から C_{n+1} を通らず Q_{n+1} に至る経路の個数、

Q_{n+1} から P_{n+1} を通らず B_{n+1} に至る経路の個数は、それぞれ y_n, x_n, x_n に等しいから　$\therefore {x_n}^2y_n$

⑥の場合の個数　⑤と同様に　$\therefore {x_n}^2y_n$

⑦の場合の個数

A_{n+1} から R_{n+1} を通り P_{n+1} に至る経路の個数、 P_{n+1} から Q_{n+1} を通り B_{n+1} に至る経路の個数は、ともに y_n に等しいから　$\therefore y_n{}^2$

$$\therefore x_{n+1} = x_n{}^2 + x_n y_n + x_n y_n + x_n{}^3 + x_n{}^2 y_n + x_n{}^2 y_n + y_n{}^2 = x_n{}^3 + 2x_n{}^2 y_n + x_n{}^2 + 2x_n y_n + y_n{}^2$$

A_{n+1} から C_{n+1} を通り B_{n+1} に至る経路の個数を考える。

⑧の場合の個数

A_{n+1} から P_{n+1} を通らず R_{n+1} に至る経路の個数、 R_{n+1} から C_{n+1} を通り Q_{n+1} に至る経路の個数、Q_{n+1} から P_{n+1} を通らず B_{n+1} に至る経路の個数は、それぞれ x_n, y_n, x_n に等しいから　$\therefore x_n{}^2 y_n$

⑨の場合の個数

A_{n+1} から P_{n+1} を通り R_{n+1} に至る経路の個数、 R_{n+1} から C_{n+1} を通り Q_{n+1} に至る経路の個数、Q_{n+1} から P_{n+1} を通らず B_{n+1} に至る経路の個数は、それぞれ y_n, y_n, x_n に等しいから　$\therefore x_n y_n{}^2$

⑩の場合の個数　⑨と同様に　$\therefore x_n y_n{}^2$

$$\therefore y_{n+1} = x_n{}^2 y_n + x_n y_n{}^2 + x_n y_n{}^2 = x_n{}^2 y_n + 2x_n y_n{}^2$$

以上により

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n{}^3 + 2x_n{}^2 y_n + x_n{}^2 + 2x_n y_n + y_n{}^2 \\ y_{n+1} &= x_n{}^2 y_n + 2x_n y_n{}^2 \end{aligned} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)

$x_2 = 7,\ y_2 = 3$ を代入して

$x_3 = 7^3 + 2 \cdot 7^2 \cdot 3 + 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 3^2 = 343 + 294 + 49 + 42 + 9 = 737$

$y_3 = 7^2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \cdot 3^2 = 147 + 126 = 273$

$\therefore x_3 = 737,\ y_3 = 273$ ……(答)