1990 年東大理 1

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_0^1=2$$

であるから　$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ……(答)

$$\frac{1}{\sqrt{2k+2}}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\frac{1}{\sqrt{2k}}\text{ より}\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<b_n<\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_n-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<b_n<\frac{1}{\sqrt{2}}a_n\qquad \therefore\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\frac{1}{a_n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}<\frac{b_n}{a_n}<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ であるから、はさみうちの原理より　$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ……(答)