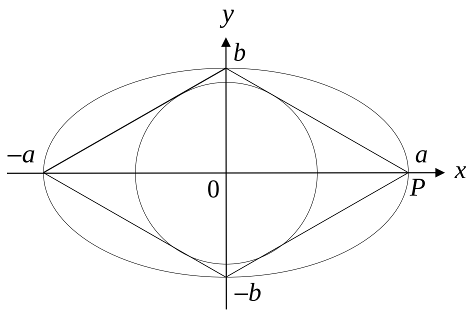
1990 年東大理 $\boxed{5}$

円に外接する平行四辺形の 4 辺は等しい。すなわち菱形であり、2 本の対角線は直交する。
今、C_1 上の点 $P(a,0)$ を頂点の 1 つとする、C_0 に外接する菱形を考える。ただし、$a>1$ とする。
対称性から、$(-a,0)$ も頂点の 1 つとなる。



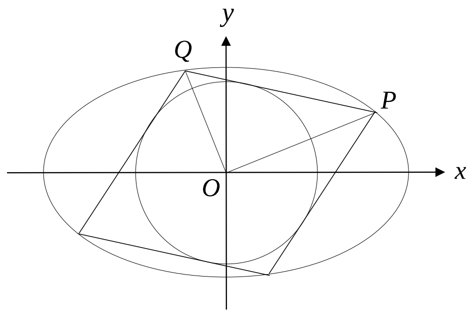
P から C_0 に引いた接線を $y=k(x-a)$ とすると

$$\frac{|k\cdot 0-0-ka|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \quad k^2a^2=k^2+1 \quad (a^2-1)k^2=1 \quad \therefore k=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$$

したがって、P から C_0 に引いた接線は、$\left(0,\ \pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)$ を通る。

対称性からこれらも頂点となるから、

$$b=\frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \quad (a^2-1)b^2=a^2 \quad a^2b^2=a^2+b^2 \quad \therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\ (a>1,\ b>1) \text{ ——①}$$



次に、$a>1, b>1$ の条件下で、C_1 上の任意の点 P を考える。
OP と OQ が直交するように、C_1 上の点 Q をとり、
$\overline{OP}=p,\ \overline{OQ}=q$ とする。
$P,\ Q$ を頂点とする菱形が C_0 に外接する条件は、①より

$$\therefore \frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}=1 \text{ ——②}$$

①が成り立つとき、C_1 上の任意の点 P について②が成り立つか調べる。
①が成り立つとき、C_1 の方程式は　$x^2+(a^2-1)y^2=a^2$ ——③
P を $y=mx\ (m\neq 0)$ 上の点とし、$P(t,\ mt)$ と置く。③に代入すると

$$t^2+(a^2-1)m^2t^2=a^2 \quad \therefore t^2=\frac{a^2}{1+(a^2-1)m^2} \quad \therefore p^2=(1+m^2)t^2=\frac{(1+m^2)a^2}{1+(a^2-1)m^2} \text{ ——④}$$

一方、Q は $y=-\dfrac{1}{m}x$ 上の点であるから、④の m^2 を $\dfrac{1}{m^2}$ で置き換えれば

$$\therefore q^2=\frac{\left(1+\dfrac{1}{m^2}\right)a^2}{1+(a^2-1)\dfrac{1}{m^2}}=\frac{(1+m^2)a^2}{m^2+a^2-1} \text{ ——⑤}$$

④、⑤より　$\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}=\dfrac{1+(a^2-1)m^2}{(1+m^2)a^2}+\dfrac{m^2+a^2-1}{(1+m^2)a^2}=\dfrac{(1+m^2)a^2}{(1+m^2)a^2}=1$

したがって、任意の m について、すなわち C_1 上の任意の点 P について、②が成立することが示された。

以上により、求める必要十分条件は　$\therefore \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\ (a>1,\ b>1)$ ……(答)