1990年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$\dfrac{41}{333}=0.123123\ \cdots=0.\dot{1}2\dot{3}$　$n\geqq 3$ で $a_n<\dfrac{41}{333}$ が決まる確率を考える。

小数点以下第1位は1でなければならない。第2位が1ならば $a_n<\dfrac{41}{333}$ が決まる。

小数点以下第1位が1、第2位が2のとき、第3位が2以下ならば $a_n<\dfrac{41}{333}$ が決まる。

3回までに $a_n<\dfrac{41}{333}$ が決まる確率は　$\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{27}$

3回まで数字が一致し、4回から6回までに $a_n<\dfrac{41}{333}$ が決まる確率は　$\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{27}=\dfrac{1}{216}\cdot\dfrac{1}{27}$

$3m$ 回まで数字が一致し、$3m+1$ 回から $3m+3$ 回までに $a_n<\dfrac{41}{333}$ が決まる確率は　$\left(\dfrac{1}{216}\right)^m\cdot\dfrac{1}{27}$　$m=0$ でも成立。

$$\therefore \lim_{n\to\infty}P_n\left(\frac{41}{333}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{27}\cdot\left(\frac{1}{216}\right)^m=\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{216}}=\frac{8}{215}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$\alpha=0.4$ のとき

1回目に3以下が出れば $a_n<\alpha$ が決まり、1回目に4以上が出れば必ず $a_n>\alpha$ となるので　$P_n(\alpha)=\dfrac{1}{2}\ (n\geqq 1)$

$\alpha=0.41$ のとき

同様に、1回目に3以下が出たときのみ $a_n<\alpha$ が決まるので　$P_n(\alpha)=\dfrac{1}{2}\ (n\geqq 2)$

$\alpha=0.42$ のとき

1回目に3以下が出るか、1回目に4、2回目に1が出たとき $a_n<\alpha$ が決まるので　$P_n(\alpha)=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2>\dfrac{1}{2}\ (n\geqq 2)$

$\alpha=0.412$ のとき　$P_n(\alpha)=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\ (n\geqq 3)$　同様に

$\alpha=0.4\underbrace{11\cdots1}_{m個}2$ のとき　$P_n(\alpha)=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^{m+2}\ (n\geqq m+2)$ であるから

$m\to\infty$ とすれば $P_n(\alpha)\to\dfrac{1}{2}$　$\therefore \alpha\leqq 0.4111\ \cdots=0.4\dot{1}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{90}=\dfrac{37}{90}$

$\alpha=0.36$ のとき

1回目に2以下が出るか、1回目に3が出て2回目に5以下が出たとき $a_n<\alpha$ が決まるので

$$P_n(\alpha)=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{17}{36}<\frac{1}{2}\ (n\geqq 2)$$

$\alpha = 0.366$ のとき　$P_n(\alpha) = \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6} = \dfrac{17}{36} + \dfrac{5}{216} < \dfrac{17}{36} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{2}\ (n \geqq 3)$　同様に

$\alpha = 0.3\underbrace{66\cdots6}_{m個}$ のとき

$$P_n(\alpha) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6} + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^m\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{5}{36}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^m}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^m\right\} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{m+1}\ (n \geqq m+1)$$

$m \to \infty$ とすれば $P_n(\alpha) \to \dfrac{1}{2}$　$\therefore 0.3666\cdots = 0.3\dot{6} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{11}{30} \leqq \alpha$

以上により　$\therefore \dfrac{11}{30} \leqq \alpha \leqq \dfrac{37}{90}$　……（答）