1991 年東大文 $\boxed{2}$

$Q(0,\ t,\ t^2)$ とすると　$\overrightarrow{PQ}=(-2,\ t,\ t^2-1)$

$t=\pm1$ のとき、$\overrightarrow{PQ}=(-2,\ \pm1,\ 0)$ であり、直線 PQ は xy 平面と平行である。

$t\neq\pm1$ のとき　直線 PQ 上の点は $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\t\\t^2-1\end{pmatrix}$ と表せる。点 R の z 座標は 0 であるから

$$k(t^2-1)+1=0 \qquad k=-\frac{1}{t^2-1} \qquad \therefore x=2(1-k)=2\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{2t^2}{t^2-1} \qquad y=kt=-\frac{t}{t^2-1}$$

$t=0$ のとき　$x=y=0$。

$t\neq0$ のとき　$x=-2ty$ より　$\dfrac{1}{t}=-\dfrac{2y}{x}$

$$x=\frac{2}{1-\dfrac{1}{t^2}}=\frac{2}{1-\dfrac{4y^2}{x^2}}=\frac{2x^2}{x^2-4y^2} \qquad x(x^2-4y^2)=2x^2 \qquad x(x^2-2x-4y^2)=0$$

$t\neq0$ より $x\neq0$ であるから　$x^2-2x-4y^2=0$　$\therefore (x-1)^2-4y^2=1$ ——①

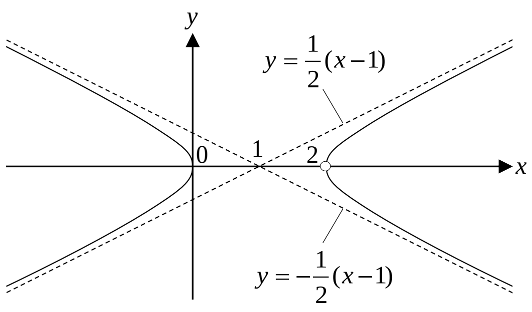
①は $(x,\ y)=(0,\ 0)$ も通る。すなわち、$t=0$ のときも成立。

$\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty}\frac{2}{1-\dfrac{1}{t^2}}=2$ より、$t\to\pm\infty$ のとき、R は $(2,\ 0)$ に近づく。

R が描く図形 F は、双曲線 $(x-1)^2-4y^2=1$ から

$(2,\ 0)$ を除いたものであり、右図の通り。

漸近線は $y=\pm\dfrac{1}{2}(x-1)$ である。



なお、$-1<t<1$ のとき $x\leqq0$ の部分を動き、

$t<-1,\ 1<t$ のとき $2<x$ の部分を動く。