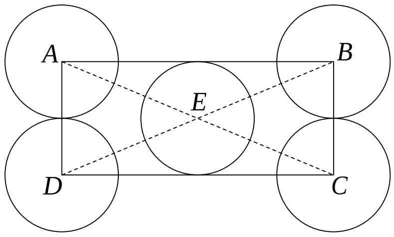
1991年東大文$\boxed{3}$

題意を満たすrの最大値を、Rとする。

Eを中心とする円が、他の円と接しないとき

i）$AB=1,\ AD=a$　ii）$AB=a,\ AD=1$　のいずれかである。

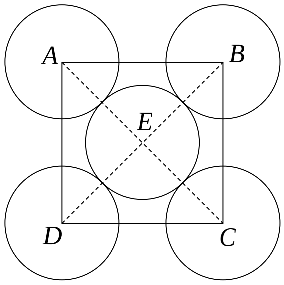


i)のとき$R=\dfrac{a}{2}$、ii)のとき$R=\dfrac{1}{2}$である。$AC=\sqrt{a^2+1}>4R$より

i)のとき　$\sqrt{a^2+1}>2a$　$a^2+1>4a^2$　$3a^2<1$　$\therefore 0<a<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ii)のとき　$\sqrt{a^2+1}>2$　$a^2+1>4$　$a^2>3$　$\therefore \sqrt{3}<a$

Eを中心とする円が、他の円と接するとき



$R=\dfrac{1}{4}\sqrt{a^2+1}$であり、$1\geqq 2R,\ a\geqq 2R$、$R\leqq\dfrac{1}{2}, R\leqq\dfrac{a}{2}$であるから

$\dfrac{1}{4}\sqrt{a^2+1}\leqq\dfrac{1}{2}$より　$\sqrt{a^2+1}\leqq 2$　$a^2+1\leqq 4$　$a^2\leqq 3$　$\therefore a\leqq\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{4}\sqrt{a^2+1}\leqq\dfrac{a}{2}$より　$\sqrt{a^2+1}\leqq 2a$　$a^2+1\leqq 4a^2$　$3a^2\geqq 1$　$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq a$

$S(a)$は半径Rの円の面積の2倍であり、$S(a)=2\pi R^2$であるから、$f(a)=\dfrac{S(a)}{a}$とすると

$0<a<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$のとき　$f(a)=\dfrac{2\pi}{a}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{\pi a}{2}$　$f'(a)=\dfrac{\pi}{2}>0$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq a\leqq\sqrt{3}$のとき　$f(a)=\dfrac{2\pi}{a}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{4}\right)^2=\dfrac{\pi}{8}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$　$f'(a)=\dfrac{\pi}{8}\left(1-\dfrac{1}{a^2}\right)=\dfrac{\pi(a+1)(a-1)}{8a^2}$

$\sqrt{3}<a$のとき　$f(a)=\dfrac{2\pi}{a}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{2a}$　$f'(a)=-\dfrac{\pi}{2a^2}<0$

これより、$f(a)=\dfrac{S(a)}{a}$の増減は右の通り。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(a)$		＋		－	0	＋		－
$f(a)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

グラフの概形は下図の通りである。