1991 年東大理後期 $\boxed{1}$

(1)

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

増減は下の通りで、$0<x<e$ において単調増加、$x=e$ において極大、$e<x$ において単調減少となる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		＋	0	－
$f(x)$		↗		↘

(2)

$a<b$ とする。$a^b=b^a$ の両辺の自然対数をとると　$b\log a=a\log b$　$\dfrac{\log a}{a}=\dfrac{\log b}{b}$　$\therefore f(a)=f(b)$

(1) より、$f(x)$ は $x=e$ においてただ 1 つの極大値を持つので、$a<e<b$ でなければならない。

$f(1)=0$ であり、$x>1$ において $f(x)>0$、$2<e<3$ であるから、$a=2$ しかあり得ない。

$b=4$ とすれば、$2^4=4^2=16$ となり、$a^b=b^a$ が成立。式の対称性より　$\therefore (a,b)=(2,4),(4,2)$ ……(答)

(3)

$3^x=x^3$ より　$\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{\log 3}{3}$　$x=3$ 以外に、$f(x)=\dfrac{\log 3}{3}$ かつ $x<e$ である正の数 x が存在する。

このような x が有理数であると仮定し、$x=\dfrac{q}{p}$ (p,q は互いに素な自然数) とおく。

$$3^{\frac{q}{p}}=\left(\frac{q}{p}\right)^3 \quad 3^q=\left(\frac{q}{p}\right)^{3p} \quad 3^q p^{3p}=q^{3p} \ \text{——①}$$

①より、左辺は 3 の倍数であるから、q^{3p} は 3 の倍数であり、q は 3 の倍数。$q=3q'$ とすると

$$3^{3q'}p^{3p}=3^{3p}q'^{3p} \quad p^{3p}=3^{3(p-q')}q'^{3p} \ \text{——②}$$

ここで、$\dfrac{q}{p}=\dfrac{3q'}{p}<3$ より $q'<p$ で、$p-q'>0$ であるから、②の右辺は 3 の倍数である。

これより、p^{3p} は 3 の倍数であり、p は 3 の倍数であるが、これは p,q が互いに素であることに反する。

したがって仮定は誤りであり、$3^x=x^3$ を満たす正の有理数は 3 以外に存在しないことが示された。(証明終)