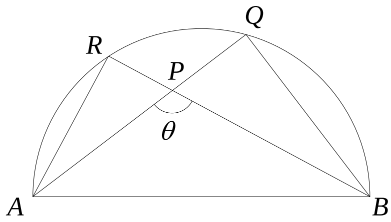
1991 年東大理後期 $\boxed{3}$



(1)

$\angle BAP=\alpha, \angle ABP=\beta$ とすると、$\alpha+\beta=\pi-\theta$

$\angle AQB=\dfrac{\pi}{2}$ より、 $BQ=2\sin\alpha, AQ=2\cos\alpha$ であるから、

△ ABQの面積S_1は　$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cdot 2\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$

同様に、△ ABRの面積S_1は　$S_2=\sin 2\beta$

正弦定理より　$\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{PB}{\sin\alpha}$　$\therefore PB=\dfrac{2\sin\alpha}{\sin\theta}$　△ ABPの面積S_3は　$S_3=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot PB\cdot\sin\beta=\dfrac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin\theta}$

五角形 $ARPQB$の面積Sは　$S=S_1+S_2-S_3=\sin 2\alpha+\sin 2\beta-\dfrac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin\theta}$

ここで、

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=2\sin(\pi-\theta)\cos(\alpha-\beta)=2\sin\theta\cos(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\pi-\theta)=\cos(\alpha-\beta)+\cos\theta$$
$$\therefore S=2\sin\theta\cos(\alpha-\beta)-\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{2\sin^2\theta-1}{\sin\theta}\cdot\cos(\alpha-\beta)=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

対称性より $\alpha\geqq\beta$ で考えると　$0\leqq\alpha-\beta<\pi-\theta$　$\therefore -\cos\theta<\cos(\alpha-\beta)\leqq 1$

したがって、1 次関数 $S(x)=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}x\ (-\cos\theta<x\leqq 1)$ を考えると

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$\pi<2\theta<\dfrac{3}{2}\pi$　$\cos 2\theta<0$ であるから　$\therefore S(-\cos\theta)<S(x)\leqq S(1)$

$\dfrac{3}{4}\pi<\theta<\pi$ のとき　$\dfrac{3}{2}\pi<2\theta<2\pi$　$\cos 2\theta>0$ であるから　$\therefore S(1)\leqq S(x)<S(-\cos\theta)$

$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$2\theta=\dfrac{3}{2}\pi$　$\cos 2\theta=0$ であるから　$\therefore S=1$

$S(-\cos\theta)=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos 2\theta)=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot 2\sin^2\theta=-2\sin\theta\cos\theta=-\sin 2\theta$　$S(1)=-\dfrac{\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta}$　より

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi \text{のとき} & -\sin 2\theta<S\leqq-\dfrac{\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta} \\ \dfrac{3}{4}\pi<\theta<\pi \text{のとき} & -\dfrac{\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta}\leqq S<-\sin 2\theta \quad \cdots\cdots\text{(答)} \\ \theta=\dfrac{3}{4}\pi \text{のとき} & S=1 \end{cases}$$

(2)

$f(\theta)=-\dfrac{\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta}$, $g(\theta)=-\sin 2\theta$ とおく。$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ における $f(\theta)$ の増減を調べる。

$$f'(\theta)=-\frac{(-\sin\theta-2\sin 2\theta)\sin\theta-(\cos\theta+\cos 2\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\sin 2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta\cos 2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1+4\sin^2\theta\cos\theta+\cos\theta(2\cos^2\theta-1)}{\sin^2\theta}=\frac{1+4(1-\cos^2\theta)\cos\theta+2\cos^3\theta-\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1+3\cos\theta-2\cos^3\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=-\frac{(\cos\theta+1)(2\cos^2\theta-2\cos\theta-1)}{1-\cos^2\theta}=-\frac{2\cos^2\theta-2\cos\theta-1}{1-\cos\theta}$$

ここで、$2t^2-2t-1=0$ を解くと、$t=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より $-1<\cos\theta<0$ であるから　$\therefore \cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ を α とおくと　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\alpha$ のとき $\cos\theta>\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$　$\alpha<\theta<\pi$ のとき $\cos\theta<\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

θ	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		＋	0	−	
$f(\theta)$		↗		↘	

$f(\theta)$ の増減は左の通りで、$\theta=\alpha$ のとき極大。

$$f(\theta)=-\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta}=-\frac{2\cos^2\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}=\frac{(1-2\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\sin\theta}=\frac{(1-2\cos\theta)(1-\cos^2\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta(1-2\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta(1-2\cos\theta)}{1-\cos\theta}$$

より　$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0}f(\theta)=0$ で、また $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0}f(\theta)=1$。

$$f(\alpha)=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-(1-\sqrt{3})}{1-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt[4]{3}\,(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}$$

であるから、$f(\theta), g(\theta)$ のグラフの概形は下の通り。

これより　$\therefore 0<S\leqq\dfrac{\sqrt[4]{3}\,(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}$　……(答)