1991 年東大理 $\boxed{2}$

$P(a\cos\theta,\ b\sin\theta,\ c+1),\ A(a,\ b,\ c),\ B(a,\ -b,\ c),\ C(-a,\ -b,\ c),\ D(-a,\ b,\ c)$ とおく。

$\overrightarrow{PA}=(a(1-\cos\theta),\ b(1-\sin\theta),\ -1)$ であるから、直線 PA 上の点は $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} a(1-\cos\theta) \\ b(1-\sin\theta) \\ -1 \end{pmatrix}$ と表せる。

直線 PA が xy 平面と交差する点を A' とすると、$c-t=0$ より $t=c$ であるから

$A'(a(1+c-c\cos\theta),\ b(1+c-c\sin\theta),\ 0)$

となる。同様に、

$\overrightarrow{PB}=(a(1-\cos\theta),\ -b(1+\sin\theta),\ -1),\ \overrightarrow{PC}=(-a(1+\cos\theta),\ -b(1+\sin\theta),\ -1),$

$\overrightarrow{PD}=(-a(1+\cos\theta),\ b(1-\sin\theta),\ -1)$

であるから、直線 $PB,\ PC,\ PD$ が xy 平面と交差する点 $B',\ C',\ D'$ は

$B'(a(1+c-c\cos\theta),\ -b(1+c+c\sin\theta),\ 0),\ C'(-a(1+c+c\cos\theta),\ -b(1+c+c\sin\theta),\ 0),$

$D'(-a(1+c+c\cos\theta),\ b(1+c-c\sin\theta),\ 0)$

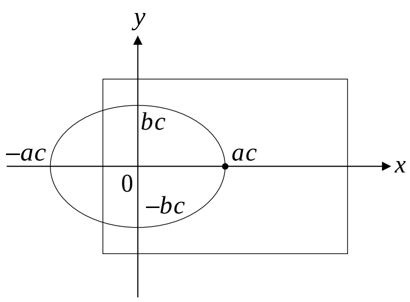
これより　$A'B'=D'C'=2b(1+c),\ A'D'=B'C'=2a(1+c)$

$A'C'$ の中点を $(x,\ y,\ 0)$ とすると　$x=-ac\cos\theta,\ y=-bc\sin\theta$　$\therefore \cos^2\theta+\sin^2\theta=\dfrac{x^2}{a^2c^2}+\dfrac{x^2}{b^2c^2}=1$

影 $A'B'C'D'$ は、x 軸方向の辺の長さ $2a(1+c)$ 、

y 軸方向の辺の長さ $2b(1+c)$ 、中心が楕円 $\dfrac{x^2}{a^2c^2}+\dfrac{x^2}{b^2c^2}=1$ 上

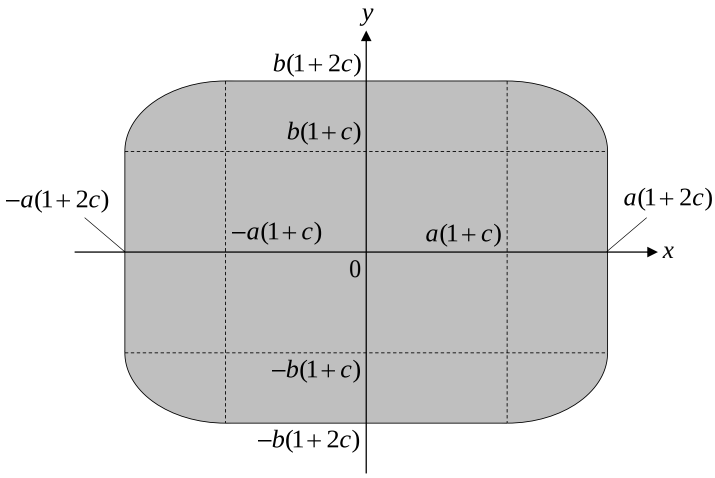
にある長方形になる。



P を動かすと、影が通過する部分は、

右図の通り。四隅の曲線部分は、

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2c^2}+\dfrac{x^2}{b^2c^2}=1$ の一部である。



面積は

$\pi\cdot ac\cdot bc+2a(1+c)\cdot 2b(1+c)+2\cdot 2a(1+c)\cdot bc+2\cdot ac\cdot 2b(1+c)$

$=\pi abc^2+4bc(1+c)^2+4abc(1+c)+4abc(1+c)$

$=ab\left\{\pi c^2+4(1+c)^2+8c(1+c)\right\}$

$=ab\left\{\pi c^2+4(1+c)(1+3c)\right\}$ ……（答）