1991 年東大理 $\boxed{3}$

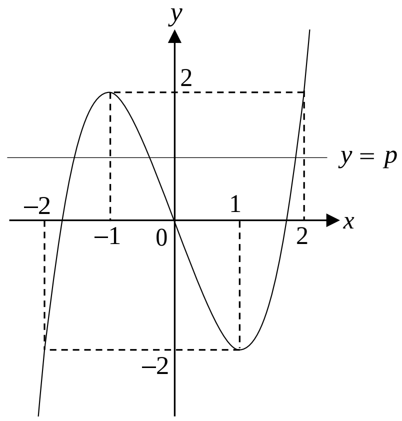
(1)

$h(x)=x^3-3x$ とおくと　$h'(x)=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$x=-1$ のとき極大値 2 をとり、$x=1$ のとき極小値 -2 をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$y=h(x)$ のグラフの概形は右図の通り。



3 次方程式 $x^3-3x-p=0$ は、

$-2\leqq p\leqq 2$ のとき重解を含む 3 つの実数解を持ち、

$p<-2,\ 2<p$ のとき 1 つの実数解を持つ。

i）$-2\leqq p\leqq 2$ のとき

3 つの実数解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha\leqq\beta\leqq\gamma)$ とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3\\ \alpha\beta\gamma=p\end{cases}$$

$f(p)=\gamma\alpha$ であるから　$\gamma\alpha=-\beta(\gamma+\alpha)-3=\beta^2-3$

$f(p)$ は β の関数として表され、$-1\leqq\beta\leqq 1$ であるから　$\therefore -3\leqq f(p)\leqq -2$

$f(p)$ は $\beta=0$ のとき最小値 -3 をとり、このとき $p=0$。

ii）$p<-2,\ 2<p$ のとき

1 つの実数解 α について、$|\alpha|>2$ となるから　$\therefore f(p)=\alpha^2>4$

以上により、$f(p)$ は $p=0$ のとき最小値 -3 をとる。……(答)

(2)

$-2\leqq p\leqq 2$ のとき

$f(p)=\beta^2-3$ で、$-1\leqq\beta\leqq 1$ であり、

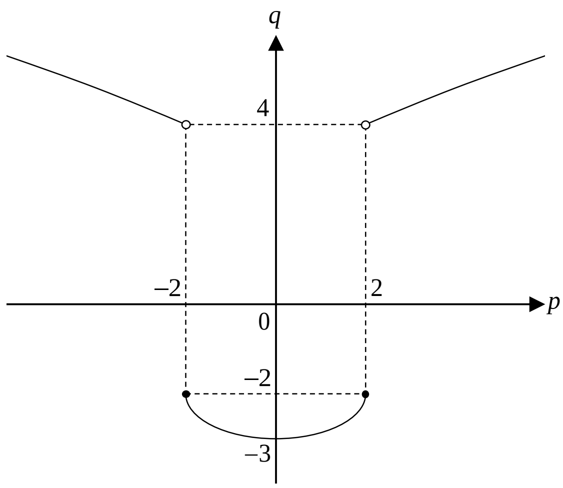
p と β は一対一に対応している。

$p<-2$ のとき $f(p)=\alpha^2$ は単調減少であり、

$2<p$ のとき $f(p)=\alpha^2$ は単調増加。

p と α は一対一に対応している。

対称性を考慮し、$q=f(p)$ のグラフの概形は右図の通り。



（注 1）

凹凸についてどこまで議論すればよいか悩ましいが、$f(p)$ の凹凸は以下のようにわかる。

$-2<p<2$ のとき

$p=\beta^3-3\beta\ (-1<\beta<1)$ より　両辺を p で微分すると　$1=3(\beta^2-1)\cdot\dfrac{d\beta}{dp}$　$\therefore\dfrac{d\beta}{dp}=\dfrac{1}{3(\beta^2-1)}$

$f(p)=\beta^2-3$ より　$f'(p)=2\beta\cdot\dfrac{d\beta}{dp}=\dfrac{2\beta}{3(\beta^2-1)}$　$f''(p)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1\cdot(\beta^2-1)-\beta\cdot2\beta}{(\beta^2-1)^2}\cdot\dfrac{d\beta}{dp}=\dfrac{2(\beta^2+1)}{9(1-\beta^2)^3}>0$

$p<-2,\ 2<p$ のとき

$p=\alpha^3-3\alpha\ (\alpha<-2,\ 2<\alpha)$ より　上記と同様に　$\therefore\dfrac{d\alpha}{dp}=\dfrac{1}{3(\alpha^2-1)}$

$f(p)=\alpha^2$ より　$f'(p)=2\alpha\cdot\dfrac{d\alpha}{dp}=\dfrac{2\alpha}{3(\alpha^2-1)}$　$f''(p)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1\cdot(\alpha^2-1)-\alpha\cdot2\alpha}{(\alpha^2-1)^2}\cdot\dfrac{d\alpha}{dp}=-\dfrac{2(\alpha^2+1)}{9(\alpha^2-1)^3}<0$

以上により、$f(p)$ は $-2<p<2$ のとき下に凸、$p<-2,\ 2<p$ のとき上に凸である。変曲点はない。

（注 2）

$q=f(p)$ を p の式で表すことはできないが、p を q の式で表すことはできる。

$-2<p<2$ のとき

$q=\beta^2-3$ より　$\beta^2=q+3$　$\beta=\pm\sqrt{q+3}$　$\therefore p=\beta(\beta^2-3)=\pm q\sqrt{q+3}\ (-3\leqq q\leqq-2)$

$p<-2,\ 2<p$ のとき

$q=\alpha^2$ より　$\alpha=\pm\sqrt{q}$　$\therefore p=\alpha(\alpha^2-3)=\pm\sqrt{q}(q-3)\ (4<q)$

すなわち、$f(p)$ の $p\geqq0$ の部分を $g(p)$ とすると、逆関数 $g^{-1}(p)$ は

$$g^{-1}(p)=\begin{cases}-p\sqrt{p+3} & (-3\leqq p\leqq-2)\\ \sqrt{p}(p-3) & (4<p)\end{cases}$$

である。