1991 年東大理 $\boxed{4}$

(1)

数学的帰納法で示す。

$n=1$ のとき　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$ であるから、$p_1(x)=x,\ q_1(x)=1$ とすれば題意を満たす。

$n=k$ のとき

ある多項式 $p_k(x),\ q_k(x)$ が存在して、$\sin k\theta=p_k(\tan\theta)\cos^k\theta,\ \cos k\theta=q_k(\tan\theta)\cos^k\theta$ と書けると仮定すると

$$\begin{aligned}\sin(k+1)\theta&=\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta=p_k(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta+q_k(\tan\theta)\tan\theta\cos^{k+1}\theta\\&=\left\{p_k(\tan\theta)+\tan\theta q_k(\tan\theta)\right\}\cos^{k+1}\theta\\\cos(k+1)\theta&=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta=q_k(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta-p_k(\tan\theta)\tan\theta\cos^{k+1}\theta\\&=\left\{q_k(\tan\theta)-\tan\theta q_k(\tan\theta)\right\}\cos^{k+1}\theta\end{aligned}$$

したがって、$p_{k+1}(x)=p_k(x)+xq_k(x),\ q_{k+1}(x)=q_k(x)-xp_k(x)$ とすれば、$n=k+1$ でも成立。

以上により示された。（証明終）

(2)

数学的帰納法で示す。

(1) より、$n>1$ のとき　$p_n(x)=p_{n-1}(x)+xq_{n-1}(x),\ q_n(x)=q_{n-1}(x)-xp_{n-1}(x)$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\tan\theta\cos^2\theta,\ \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta$ より

$$p_2(x)=2x,\ q_2(x)=-x^2+1\quad\therefore p_2'(x)=2=2q_1(x),\ q_2'(x)=-2x=-2p_1(x)$$

したがって、$n=2$ のとき成立。

$n=k$ のとき　$p_k'(x)=kq_{k-1}(x),\ q_k'(x)=-kp_{k-1}(x)$ と仮定すると

$p_{k+1}(x)=p_k(x)+xq_k(x)$ より

$$\begin{aligned}p_{k+1}'(x)&=p_k'(x)+q_k(x)+xq_k'(x)=kq_{k-1}(x)+q_k(x)-kxp_{k-1}(x)=k\left\{q_{k-1}(x)-xp_{k-1}(x)\right\}+q_k(x)\\&=kq_k(x)+q_k(x)=(k+1)q_k(x)\end{aligned}$$

$q_{k+1}(x)=q_k(x)-xp_k(x)$ より

$$\begin{aligned}q_{k+1}'(x)&=q_k'(x)-p_k(x)-xp_k'(x)=-kp_{k-1}(x)-p_k(x)-kxq_{k-1}(x)=-k\left\{p_{k-1}(x)+xq_{k-1}(x)\right\}-p_k(x)\\&=-kp_k(x)-p_k(x)=-(k+1)p_k(x)\end{aligned}$$

したがって、$n=k+1$ でも成立。以上により示された。（証明終）