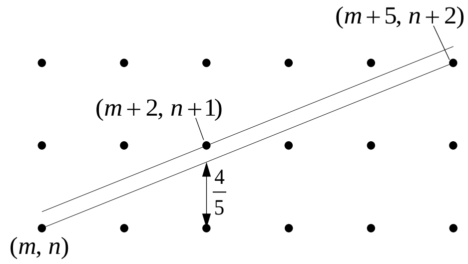
1991 年東大理 $\boxed{5}$



ある格子点 $(m,\ n)$ を通る直線 $y=\dfrac{2}{5}(x-m)+n$ は、

k を整数として $(m+5k,\ n+2k)$ で与えられる格子点を通る。

この直線を y 方向に $\dfrac{1}{5}$ 動かした直線は格子点 $(m+2,\ n+1)$ を通り、

l を整数として $(m+2+5l,\ n+1+2l)$ で与えられる格子点を通る。

以下、 y 方向に $\dfrac{1}{5}$ 動かす毎に格子点を通る。

格子点を通る直線は半径 r の円と必ず共有点を持つので、 $0<p<\dfrac{1}{5}$ として、

格子点を通らない直線 $y=\dfrac{2}{5}(x-m)+n+p$ を考える。変形して　$\therefore 2x-5y-2m+5n+5p=0$ ——①

①と格子点 $(m+5k,\ n+2k)$ の距離は

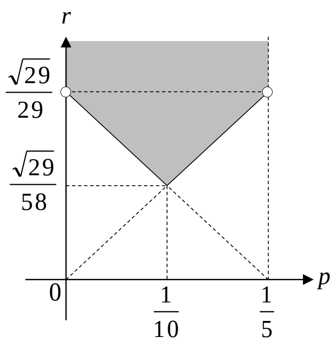
$$d_1(p)=\frac{|2(m+5k)-5(n+2k)-2m+5n+5p|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{5\sqrt{29}}{29}p$$

①と格子点 $(m+2+5l,\ n+1+2l)$ の距離は

$$d_2(p)=\frac{|2(m+2+5l)-5(n+1+2l)-2m+5n+5p|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{|-1+5p|}{\sqrt{29}}=\frac{5\sqrt{29}}{29}\left(\frac{1}{5}-p\right)$$

①が各格子点を中心とした半径 r の円と共有点を持つには、 $r \geqq d_1(p)$ かつ $r \geqq d_2(p)$ であればよい。

$0<p<\dfrac{1}{5}$ において $r \geqq d_1(p)$ かつ $r \geqq d_2(p)$ となる範囲を図示すると、



右図の通り。これより、 r の最小値は　$\therefore r=\dfrac{\sqrt{29}}{58}$ ……(答)