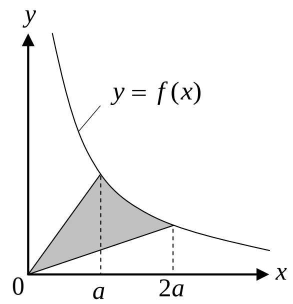
1991 年東大理 $\boxed{6}$

(1)

図の網掛部の面積は、



$$\int_a^{2a} f(x)dx+\frac{1}{2}af(a)-\frac{1}{2}\cdot 2af(2a)=S(a)+\frac{1}{2}af(a)-\frac{1}{2}\cdot 2af(2a)=3S(a)$$

$$2S(a)=\frac{1}{2}af(a)-af(2a) \quad \therefore S(x)=\frac{1}{4}x\{f(x)-2f(2x)\} \text{ ——①}$$

また、$S(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$ の両辺を微分すると、$S'(x)=2f(2x)-f(x)$ ——②

①、②より、$S(x)=-\frac{1}{4}xS'(x) \quad \frac{S'(x)}{S(x)}=-\frac{4}{x} \quad \log S(x)=-4\log x+C=\log\frac{e^C}{x^4}$

e^C を C で置き換えて、$S(x)=\frac{C}{x^4} \quad S(1)=C=1$ より、$\therefore S(x)=\frac{1}{x^4}$ ……(答)

$$\therefore f(x)-2f(2x)=-S'(x)=\frac{4}{x^5} \text{ ……(答)}$$

(2)

$f(x)-2f(2x)=\frac{4}{x^5}$ の x を $2^n x$ で置き換えて、

$f(2^n x)-2f(2^{n+1}x)=\frac{4}{2^{5n}x^5} \quad 2^n f(2^n x)-2^{n+1}f(2^{n+1}x)=\frac{4}{16^n x^5} \quad g_n(x)=2^n f(2^n x)$ と置くと、

$$g_{n+1}(x)-g_n(x)=-\frac{4}{16^n x^5} \quad \sum_{k=1}^{n}\{g_k(x)-g_{k-1}(x)\}=g_n(x)-g_0(x)=-\frac{4}{x^5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{16}\right)^{k-1}$$

$g_0(x)=f(x)$ より、

$$\therefore g_n(x)=f(x)-\frac{4}{x^5}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n}{1-\frac{1}{16}}=f(x)-\frac{64}{15x^5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\} \quad \therefore a(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x)=f(x)-\frac{64}{15x^5}$$

$$\therefore \int_x^{2x}a(t)dt=\int_x^{2x}f(t)dt-\frac{16}{15}\int_x^{2x}\frac{4}{t^5}dt=S(x)-\frac{16}{15}\left[-\frac{1}{t^4}\right]_x^{2x}=\frac{1}{x^4}-\frac{16}{15}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{16x^4}\right)=0 \text{ ……(答)}$$

(3)

$x>0$ において、$f(x)>0$ であるから $g_n(x)>0$。したがって、$a(x)\geqq 0$ でなければならない。

任意の x に対して $\int_x^{2x}a(t)dt=0$ となるので、結局 $a(x)=0$ しかあり得ない。

$$\therefore f(x)=\frac{64}{15x^5} \text{ ……(答)}$$