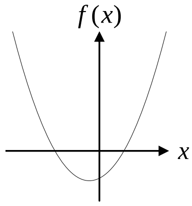
1992年東大文 $\boxed{1}$

$px^2+(p^2-q)x-(2p-q-1)=0$

$p=0$ のとき　$-qx+q+1=0$　$q=0$ は明らかに不適であるから $q\neq 0$ で、$\therefore x=1+\dfrac{1}{q}$

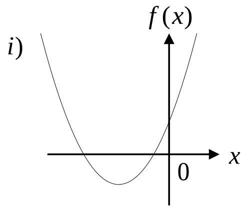
$\therefore 1+\dfrac{1}{q}<0 \iff q^2+q<0 \quad q(q+1)<0 \quad \therefore -1<q<0$ ——①



$p\neq 0$ のとき　与式の両辺を p で割り、$f(x)=x^2+\dfrac{p^2-q}{p}x+\dfrac{q-2p+1}{p}=0$ とする。

$f(0)\leqq 0$ ならば、$f(x)=0$ は非負実数解を持つ。

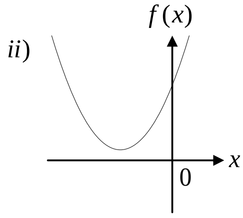
したがって　$f(0)=\dfrac{q-2p+1}{p}>0 \iff \therefore p(q-2p+1)>0$ ——②



②の条件下で、

i）$f(x)=0$ が実数解を持つとき

すべて負となるには　$D\geqq 0$　かつ　軸 $\dfrac{q-p^2}{2p}<0 \iff \therefore p(q-p^2)<0$ ——③



ii）$f(x)=0$ が虚数解を持つとき

解の実部は軸に等しいから　$D<0$　かつ　軸 $\dfrac{q-p^2}{2p}<0 \iff \therefore p(q-p^2)<0$

結局、判別式 D の符号に関わらず、②かつ③が成り立てばよい。

以上、①、②、③により

$p=0$ のとき　$-1<q<0$

$p\neq 0$ のとき　$p(q-2p+1)>0$　かつ　$p(q-p^2)<0$

これらを図示すると右図の網掛部の通り。

境界線は q 軸の $-1<q<0$ の部分のみ含み、各交点は含まない。

なお、$q=2p-1$ は $q=p^2$ の接線である。