1992 年東大理後期 $\boxed{2}$

(1)

H_1 を xy 平面、L を x 軸とし、H_1 上の点 $A(a,\ b,\ 0)\ (b>0)$ 、L 上の点 $B(0,\ 0,\ 0)$ を固定しても一般性を失わない。
H_2 上の点 B は $(c,\ d\cos\theta,\ d\sin\theta)\ (d>0)$ とおける。このとき

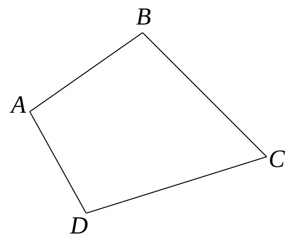
$$\cos\angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{ac+bd\cos\theta}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ において、θ が増加すると $\cos\theta$ は単調減少するから、$\cos\angle ABC$ も単調減少する。
したがって、θ が増加すると $\angle ABC$ も増加する。(証明終)

(2)

4 点 $A,\ B,\ C,\ D$ が同一平面上にあるとき

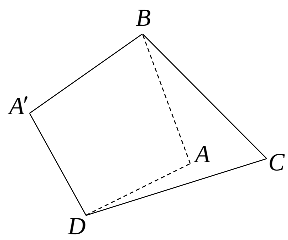
i) 4 点 $A,\ B,\ C,\ D$ をこの順に結ぶと凸四角形をなすとき



凸四角形の内角の和は 2π であるから

$\therefore \angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB=2\pi$

ii) 4 点 $A,\ B,\ C,\ D$ をこの順に結ぶと凹四角形をなすとき

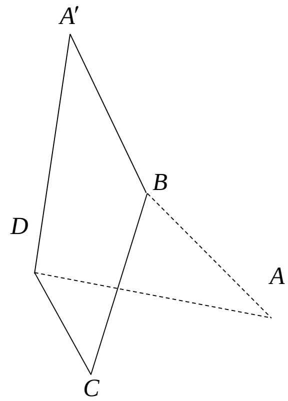


BD を軸に点 A を π 回転させ、再び平面に達した点を A' とすると、(1) より

$\therefore \angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB<\angle A'BC+\angle BCD+\angle CDA'+\angle DAB=2\pi$

いずれか 3 点が一直線上にある場合、例えば点 A が CD 上にあるときも同様。

iii) 4 点 $A,\ B,\ C,\ D$ をこの順に結ぶと 2 辺が交差するとき



BD を軸に点 A を π 回転させ、再び平面に達した点を A' とすると、(1) より

$\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB<\angle A'BC+\angle BCD+\angle CDA'+\angle DAB$

ここで、4 点 $A',\ B,\ C,\ D$ をこの順に結ぶと凸四角形をなすとき、

$\therefore \angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB<2\pi$

4 点 $A',\ B,\ C,\ D$ をこの順に結ぶと凹四角形をなすとき、ii) と同様にすれば

$\therefore \angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB<2\pi$

iv) 4 点 $A,\ B,\ C,\ D$ が一直線上にあるとき

$\angle ABC,\ \angle BCD,\ \angle CDA,\ \angle DAB$ のうち、いずれか 2 つは 0 、他の 2 つは π であるから

$\therefore \angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB=2\pi$

4 点 $A,\ B,\ C,\ D$ が同一平面上にないとき

BD を軸に点 A を点 C から離す方向に回転させ、3 点 $B,\ C,\ D$ と同じ平面上に達した点を A' とすると、
以降上記と同様の検討により、

$\therefore \angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB<2\pi$

以上により、いずれにしても $\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB\leqq 2\pi$ が示された。(証明終)