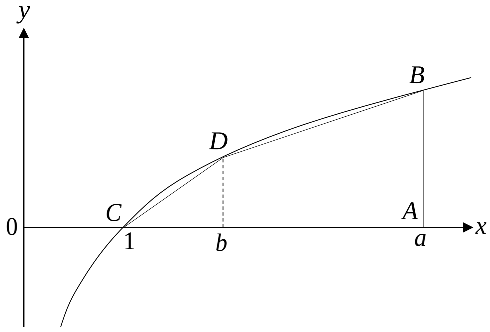
1992 年東大理 $\boxed{1}$

(1)

$$S_1 = \int_1^a \log x dx = \left[x \log x - x\right]_0^a = a \log a - a + 1$$

四角形 $ABDC$ の面積は



$$S(b) = \frac{1}{2}(b-1)\log b + \frac{1}{2}(a-b)(\log a + \log b)$$
$$= \frac{1}{2}(b\log b - \log b + a\log a + a\log b - b\log a - b\log b)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(a-1)\log b - b\log a + a\log a\right\}$$

$S(b)$ が S_1 に最も近くなるのは、$S(b)$ が最大になるときである。

$S'(b) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-1}{b} - \log a\right) = \dfrac{(a-1) - b\log a}{2b}$ より、$S'(b) = 0$ となる b は　$b = \dfrac{a-1}{\log a}$

$\dfrac{a-1}{\log a} - 1 = \dfrac{a-1-\log a}{\log a}$　　$f(a) = a - 1 - \log a$ とすると　$f'(a) = 1 - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a-1}{a} > 0$

$f(a)$ は $a > 1$ において単調増加であるから、$f(1) = 0$ より $f(a) > 0$　$\dfrac{a-1}{\log a} - 1 > 0$　$\therefore 1 < \dfrac{a-1}{\log a}$

$a - \dfrac{a-1}{\log a} = \dfrac{a\log a - a + 1}{\log a}$　　$g(a) = a\log a - a + 1$ とすると　$g'(a) = \log a + a\cdot\dfrac{1}{a} - 1 = \log a > 0$

$g(a)$ は $a > 1$ において単調増加であるから、$g(1) = 0$ より $g(a) > 0$　$a - \dfrac{a-1}{\log a} > 0$　$\therefore \dfrac{a-1}{\log a} < a$

以上により、$1 < \dfrac{a-1}{\log a} < a$ であり、$S(b)$ の増減は右の通り。

b	1	$\cdots$	$\dfrac{a-1}{\log a}$	$\cdots$	a
$S'(b)$		$+$	0	$-$	
$S(b)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$S(b)$ を最大にする、すなわち S_1 に最も近くなる b は

$\therefore b = \dfrac{a-1}{\log a}$　……(答)

$\therefore S_2 = S\left(\dfrac{a-1}{\log a}\right) = \dfrac{1}{2}\left\{a\log a - a + 1 + (a-1)\log\dfrac{a-1}{\log a}\right\}$　……(答)

(2)

$S_2 = \dfrac{1}{2}\left\{S_1 + (a-1)\log(a-1) - (a-1)\log(\log a)\right\}$ より

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{(a-1)\log(a-1) - (a-1)\log(\log a)}{a\log a - a + 1}\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{\log(a-1)}{\log a} - \left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{\log(\log a)}{\log a}}{1 - \frac{1}{\log a} + \frac{1}{a\log a}}\right\}$$

$a \to \infty$ のとき、$\log a \to \infty$ であり、

$$\frac{\log(a-1)}{\log a} = \frac{\log a + \log\left(1-\frac{1}{a}\right)}{\log a} = 1 + \frac{\log\left(1-\frac{1}{a}\right)}{\log a}$$ より $\quad \therefore \frac{\log(a-1)}{\log a} \to 1$

$t \to \infty$ のとき $\frac{\log t}{t} \to 0$ より $\quad \therefore \frac{\log(\log a)}{\log a} \to 0$

以上により $\quad \therefore \lim_{a\to\infty} \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$ ……(答)

(注)

念のため、$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} = 0$ の証明は以下の通り。

まず、$t > 1$ において $0 < \log t < \sqrt{t}$ を示す。$f(t) = \sqrt{t} - \log t$ とすると、$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{t}-2}{2t}$

$f(t)$ は $t = 4$ において最小であり、$f(4) = 2(1-\log 2) > 0$

したがって、$t > 1$ において $f(t) > 0$ が示されたので

$\therefore 0 < \log t < \sqrt{t} \quad \therefore 0 < \frac{\log t}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$

t	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘		↗

$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$ であるから、はさみうちの原理より $\quad \therefore \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} = 0$