1992年東大理$\boxed{2}$文$\boxed{4}$共通

(1)

$A(0,\ 0)$としても一般性を失わない。条件より、$B(2pm,\ 2qm),\ C(2rn,\ 2sn)$とおける。

ただし、$m,\ n$は自然数、pとq、rとsはそれぞれ互いに素な整数とする。

このとき、辺AB上、AC上には、それぞれ両端を除いて$2m-1$個、$2n-1$個の格子点がある。

辺BCの中点Mは$M(pm+rn,\ qm+sn)$となり、明らかに格子点であるから、辺BC上には、両端を除いて少なくとも1個の格子点がある。線分BM上、MC上の両端を除いた格子点の個数は等しい(0個の場合も含む)から、その個数をkとすれば、辺BC上には両端を除いて$2k+1$個の格子点がある。

以上により示された。(証明終)

(2)

(1)において$m=n=2$とすればよく、$\overrightarrow{AB}=(4p,\ 4q),\ \overrightarrow{AC}=(4r,\ 4s)$であるから、三角形$ABC$の面積は

$$
\begin{aligned}
S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}&=\frac{1}{2}\sqrt{16(p^2+q^2)\cdot 16(r^2+s^2)-16^2(pr+qs)^2}\\
&=8\sqrt{(p^2+q^2)(r^2+s^2)-(pr+qs)^2}\\
&=8\sqrt{(p^2r^2+p^2s^2+q^2r^2+q^2s^2)-(p^2r^2+2pqrs+q^2s^2)}\\
&=8\sqrt{p^2s^2-2pqrs+q^2r^2}=8\sqrt{(ps-qr)^2}=8|ps-qr|
\end{aligned}
$$

$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$は平行ではないから、$|ps-qr|\neq 0$である。

したがって、三角形ABCの面積は8で割り切れる整数である。(証明終)