1992 年東大理 $\boxed{3}$

$P, Q, R, S$ を通る半径1の球面の中心を $T(u, v, w)$ とすると

$PT=QT$ より　$u^2+v^2+w^2=(u-a)^2+v^2+w^2$　$-2au+a^2=0$　$\therefore u=\dfrac{a}{2}$

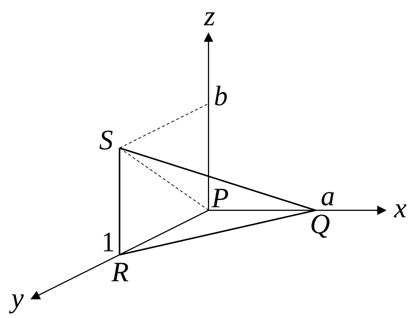
$PT=RT$ より　$u^2+v^2+w^2=u^2+(v-1)^2+w^2$　$-2v+1=0$　$\therefore v=\dfrac{1}{2}$

$RT=ST$ より　$u^2+(v-1)^2+w^2=u^2+(v-1)^2+(w-b)^2$　$-2bw+b^2=0$　$\therefore w=\dfrac{b}{2}$

$PT=1$ であるから　$u^2+v^2+w^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{b^2}{4}=1$　$\therefore a^2+b^2=3$ ——①

三角形 $PQR$ の面積は $\dfrac{1}{2}a$ であるから、四面体 $PQRS$ の体積は　$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}a\cdot b=\dfrac{1}{6}ab$

また、三角形 $PQS$、三角形 $PRS$、三角形 $QRS$ の面積は、それぞれ $\dfrac{1}{2}a\sqrt{1+b^2},\ \dfrac{1}{2}b,\ \dfrac{1}{2}b\sqrt{1+a^2}$ であるから、




$$V=\frac{1}{3}r\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{1+b^2}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b\sqrt{1+a^2}\right)=\frac{1}{6}ab$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{ab}(a+a\sqrt{1+b^2}+b+b\sqrt{1+a^2})=\frac{1}{b}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+\frac{1}{a}+\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$$

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}$$

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=1+\frac{1}{a^2}+1+\frac{1}{b^2}+2\sqrt{\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(+\frac{1}{b^2}\right)}=2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2b^2}}$$

①より

$$\therefore\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=2+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+2\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2}}=2+\frac{3}{a^2b^2}+2\sqrt{1+\frac{4}{a^2b^2}}$$

ここで、①と相加・相乗平均の関係より　$3=a^2+b^2\geqq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$　$\therefore ab\leqq\dfrac{3}{2}$ ——②

$$\therefore\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\geqq 2+3\cdot\frac{4}{9}+2\sqrt{1+\frac{16}{9}}=2+\frac{4}{3}+2\cdot\frac{5}{3}=\frac{20}{3}\quad \frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{5}{3}}\quad \frac{1}{r}\geqq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

②と相加・相乗平均の関係より

$$\therefore\frac{1}{r}\geqq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{\frac{5}{3}}\geqq\frac{2}{\sqrt{ab}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

以上により示された。等号はいずれも $a=b=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ のとき成立。（証明終）