1992年東大理 $\boxed{4}$

xz 平面上の点 $(x',\ z')$ を、原点中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点を $(x,\ z)$ とすると　$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x'-z' \\ x'+z' \end{pmatrix}$

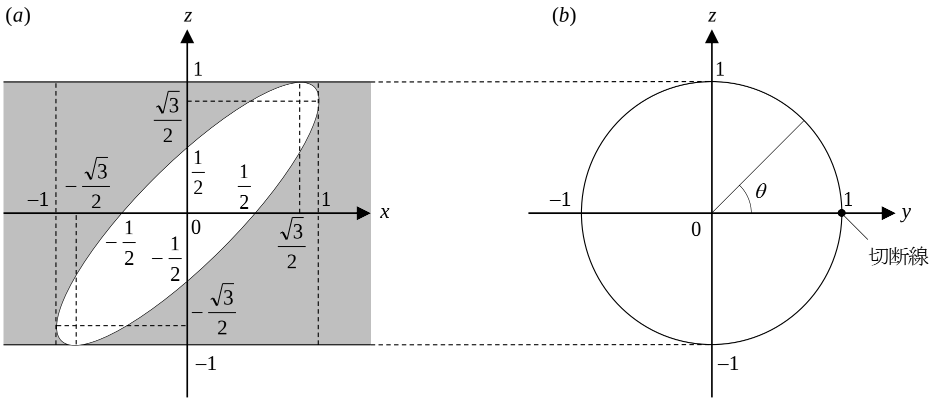
これを B の方程式に代入すると

$$\frac{(x'-z')^2}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{(x'-z')(x'+z')}{2} + \frac{(x'+z')^2}{2} = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x'^2 + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z'^2 = \frac{1}{4} \qquad \therefore \frac{x'^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2} + \frac{z'^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = 1$$

したがって、 B の xz 平面による断面は、楕円を原点中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転したものであり、概形は下図(a)の通り。

B の方程式を x についての2次方程式と見て

$D = 3z^2 - (4z^2-1) = 1 - z^2 \geqq 0 \quad \therefore -1 \leqq z \leqq 1$　同様に $-1 \leqq x \leqq 1$ も導かれる。



yz 平面上で図(b)のように角 θ を定めると、 $y=\cos\theta,\ z=\sin\theta$ であり、 $z=\sin\theta$ を B の方程式に代入すると

$$x^2 - \sqrt{3}x\sin\theta + \sin^2\theta - \frac{1}{4} = 0 \quad x = \frac{\sqrt{3}\sin\theta \pm \sqrt{3\sin^2\theta - (4\sin^2\theta - 1)}}{2} = \frac{\sqrt{3}\sin\theta \pm \sqrt{1-\sin^2\theta}}{2} = \frac{\sqrt{3}\sin\theta \pm |\cos\theta|}{2}$$

B により切り抜かれた部分は、展開図上で $x = \dfrac{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}{2}$ と $x = \dfrac{\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta}{2}$ に挟まれた部分となる。

$\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta \pm \cos\theta}{2} = \sin\left(\theta \pm \dfrac{\pi}{6}\right)$ より、図示すると下の通り。