1992 年東大理 $\boxed{6}$

(1)

A の進む歩数から B の進む歩数を引いた値を x とする。あいこならばどちらも進まないので $x=0$。

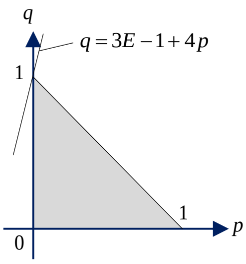
A がグー、チョキ、パーを出す確率を、それぞれ $p,\ q,\ 1-p-q$ とする。

A か B のどちらかが勝つ場合について、それぞれの確率と x を一覧表にすると下の通り。

A	グー	チョキ	パー	グー	チョキ	パー
B	チョキ	パー	グー	パー	グー	チョキ
確率	$\frac{1}{3}p$	$\frac{1}{3}q$	$\frac{1}{3}(1-p-q)$	$\frac{1}{3}p$	$\frac{1}{3}q$	$\frac{1}{3}(1-p-q)$
x	$+3$	$+5$	$+6$	-6	-3	-5

これより、x の期待値 E は

$$E=\frac{1}{3}p(3-6)+\frac{1}{3}q(5-3)+\frac{1}{3}(1-p-q)(6-5)=-p+\frac{2}{3}q+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}q=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}p+\frac{1}{3}q$$



$0\leqq p,\ 0\leqq q,\ p+q\leqq 1$ の条件下で、E の最大値を求める。

$q=3E-1+4p$ であり、pq 平面上で切片 $3E-1$ が最大になるのは、$(0,\ 1)$ を通るとき。

したがって、E が最大になるのは、A が常にチョキを出すときである。……(答)

(2)

A がグー、チョキ、パーを出す確率を、それぞれ $p,\ q,\ 1-p-q$ とする。

B がグー、チョキ、パーを出す確率を、それぞれ $a,\ b,\ c$ とする。

A か B ののどちらかが勝つ場合について、それぞれの確率と x を一覧表にすると下の通り。

A	グー	チョキ	パー	グー	チョキ	パー
B	チョキ	パー	グー	パー	グー	チョキ
確率	bp	cq	$a(1-p-q)$	cp	aq	$b(1-p-q)$
x	$+3$	$+5$	$+6$	-6	-3	-5

これより、x の期待値 E は、$a+b+c=1$ であるから

$$\begin{aligned}E&=\{6(1-p-q)-3q\}a+\{3p-5(1-p-q)\}b+(5q-6p)c=3(2-2p-3q)a+(-5+8p+5q)b+(5q-6p)c\\&=6a-5b-(6a-8b+6c)p-(9a-5b-5c)q=6a-5b-\{6(1-b)-8b\}p-\{9a-5(1-a)\}q\\&=6a-5b+(14b-6)p-(14a-5)q=5q-6p-(14q-6)a+(14p-5)b\end{aligned}$$

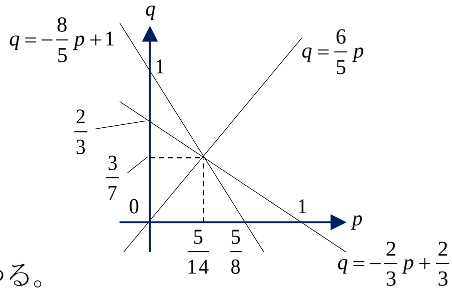
$E\geqq 0$ となるには、$5q-6p-(14q-6)a+(14p-5)b\geqq 0$ ――①

ab 平面上で①が表す領域の境界線は直線であり、①が $0\leqq a,\ 0\leqq b,\ a+b\leqq 1$ を満たす任意の点 $(a,\ b)$ について成立するには、点 $(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (0,\ 1)$ が①に含まれれば十分である。

$$5q-6p\geqq 0 \quad 5q-6p-(14q-6)\geqq 0 \quad 5q-6p+(14p-5)\geqq 0$$

$$5q-6p\geqq 0 \quad 2-2p-3q\geqq 0 \quad 8p+5q-5\geqq 0$$

$$\therefore \begin{cases} q \geqq \dfrac{6}{5}p \\ q \leqq -\dfrac{2}{3}p + \dfrac{2}{3} \\ q \geqq -\dfrac{8}{5}p + 1 \end{cases} \quad \text{——②}$$



ここで、3 直線 $q = \dfrac{6}{5}p,\ q = -\dfrac{2}{3}p + \dfrac{2}{3},\ q = -\dfrac{8}{5}p + 1$ は、1 点 $\left(\dfrac{5}{14}, \dfrac{3}{7}\right)$ で交わる。

したがって、②を同時に満たす p, q は、$p = \dfrac{5}{14},\ q = \dfrac{3}{7}$ のみであり、

$0 \leqq p,\ 0 \leqq q,\ p + q \leqq 1$ を満たす。このとき、

$$E = 5 \cdot \frac{3}{7} - 6 \cdot \frac{5}{14} - \left(14 \cdot \frac{3}{7} - 6\right)a + \left(14 \cdot \frac{5}{14} - 5\right)b = \frac{15}{7} - \frac{15}{7} - (6-6)a + (5-5)b = 0$$

であるから、確かに任意の (a, b) について $E \geqq 0$ が成立する。

したがって、任意の a, b, c について $E \geqq 0$ となるには、

A がグー、チョキ、パーを出す確率が、それぞれ $\dfrac{5}{14}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{3}{14}$ であればよい。……(答)