1993 年東大文 $\boxed{2}$

$a_1 = 1,\ a_2 = 3 \quad a_3 = 3a_2 - 7a_1 = 2$

$a_4 = 3a_3 - 7a_2 = -15 \quad a_5 = 3a_4 - 7a_3 = -59 \quad a_6 = 3a_5 - 7a_4 = -72$

a_n が偶数になるのは、n が 3 の倍数のときと予想できる。

$a_1,\ a_2$ は奇数で、a_3 は偶数。

$a_{3k-2} = 2p+1,\ a_{3k-1} = 2q+1$ とすると　$a_{3k} = 3a_{3k-1} - 7a_{3k-2} = 3(2q+1) - 7(2p+1) = 6q - 14p - 4$

したがって、a_{3k} は偶数。

$a_{3k-1} = 2q+1,\ a_{3k} = 2r$ とすると　$a_{3k+1} = 3a_{3k} - 7a_{3k-1} = 3\cdot 2r - 7(2q+1) = 6r - 14q - 7$

したがって、a_{3k+1} は奇数。

$a_{3k} = 2r,\ a_{3k+1} = 2s+1$ とすると　$a_{3k+2} = 3a_{3k+1} - 7a_{3k} = 3(2s+1) - 7\cdot 2r = 6s - 141r + 3$

したがって、a_{3k+2} は奇数。

$a_{3k+1} = 2s+1,\ a_{3k+2} = 2t+1$ とすると　$a_{3k+3} = 3a_{3k+2} - 7a_{3k+1} = 3(2t+1) - 7(2s+1) = 6t - 14s - 4$

したがって、$a_{3k+3} = a_{3(k+1)}$ は偶数。

以上により、$a_{3k-2},\ a_{3k-1}$ が奇数で a_{3k} が偶数のとき、$a_{3k+1},\ a_{3k+2}$ が奇数で $a_{3(k+1)}$ が偶数である。

a_n が偶数となる n は　$\therefore n = 3m$　……(答)