1993 年東大文 $\boxed{3}$

点 $P(x,\ y,\ x)$ の存在条件は　$1=x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}=\frac{3}{k^2}$ より　$k^2 \geqq 3$　$\therefore k \geqq \sqrt{3}$

$A(0,\ 0,\ 1),\ Q(u,\ v,\ 0)$ のとき $\overrightarrow{AQ}=(u,\ v,\ -1)$ であり、直線 AQ 上の点は $\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AQ}=(ut,\ vt,\ 1-t)$ と表せる。

直線 AQ と球面 S の点 A 以外の交点を求める。

$x^2+y^2+z^2=u^2t^2+v^2t^2+(1-2t+t^2)=1$　$(u^2+v^2+1)t^2-2t=0$

$t=0$ は点 A に対応するので　$\therefore t=\frac{2}{u^2+v^2+1}$　点 P の座標は $\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\ \frac{2v}{u^2+v^2+1},\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$

点 Q は球面 S の外部にあり、$u^2+v^2-1>0$ は明らかである。

すべての成分が $\frac{1}{k}$ 以上であるから　$\frac{2u}{u^2+v^2+1} \geqq \frac{1}{k},\ \frac{2v}{u^2+v^2+1} \geqq \frac{1}{k},\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \geqq \frac{1}{k}$

整理して　$\therefore \begin{cases} (u-k)^2+v^2 \leqq k^2-1 & \text{——①} \\ u^2+(v-k)^2 \leqq k^2-1 & \text{——②} \\ u^2+v^2 \geqq \frac{k+1}{k-1} & \text{——③} \end{cases}$

円 $(u-k)^2+v^2=k^2-1$ と $u^2+(v-k)^2=k^2-1$ の交点を求める。これらの円は $v=u$ に関して対称であるから

$(u-k)^2+u^2=k^2-1$　$2u^2-2ku+1=0$　$u=\frac{k\pm\sqrt{k^2-2}}{2}$ $(\because k \geqq \sqrt{3})$

2 交点を $S\left(\frac{k-\sqrt{k^2-2}}{2},\ \frac{k-\sqrt{k^2-2}}{2}\right),\ T\left(\frac{k+\sqrt{k^2-2}}{2},\ \frac{k+\sqrt{k^2-2}}{2}\right)$ とし、さらに $R=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ とすると

$$OT=\frac{k+\sqrt{k^2-2}}{\sqrt{2}} \geqq \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \qquad 1<R=\sqrt{1+\frac{2}{k-1}} \leqq \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$OS=\frac{k-\sqrt{k^2-2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{k+\sqrt{k^2-2}} \leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}<1 \qquad \therefore OS<1<R \leqq \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \leqq OT$$

図示すると、$k=\sqrt{3}$ のとき Q の存在範囲は 1 点のみ、$k>\sqrt{3}$ のとき網掛け部のようになり、境界線を含む。