1993年東大文 $\boxed{4}$

$y^2-2y-1+t=0$ ——① とすると

$0\leqq t\leqq 2$ より $(y-1)^2=2-t\geqq 0$ したがって①は実数解を持ち、$\therefore y=1\pm\sqrt{2-t}$

このうち、$1+\sqrt{2-t}>0$ は明らかである。

$0\leqq t<1$ のとき $2-t>1$ $\sqrt{2-t}>1$ $\therefore 1-\sqrt{2-t}<0$

$1\leqq t\leqq 2$ のとき $2-t\leqq 1$ $\sqrt{2-t}\leqq 1$ $\therefore 1-\sqrt{2-t}\geqq 0$

①の実数解のうち、$y\geqq 0$ を満たすものは

$0\leqq t<1$ のとき $y=1+\sqrt{2-t}$ のみ、$1\leqq t\leqq 2$ のとき $y=1\pm\sqrt{2-t}$

$0\leqq t<1$ のとき $x^4-2x^2-1+t=0$ の実数解は $x=-\sqrt{1+\sqrt{2-t}},\ \sqrt{1+\sqrt{2-t}}$

$1\leqq t\leqq 2$ のとき $x^4-2x^2-1+t=0$ の実数解は $x=-\sqrt{1+\sqrt{2-t}},\ -\sqrt{1-\sqrt{2-t}},\ \sqrt{1-\sqrt{2-t}},\ \sqrt{1+\sqrt{2-t}}$

結局、$0\leqq t\leqq 2$ において $g_1(t)=\sqrt{1+\sqrt{2-t}},\ g_2(t)=-\sqrt{1+\sqrt{2-t}}$ $g_1(t)-g_2(t)=2\sqrt{1+\sqrt{2-t}}$

$$\int_0^2(g_1(t)-g_2(t))dt=2\int_0^2\sqrt{1+\sqrt{2-t}}\,dt$$

$y=1+\sqrt{2-t}$ とおくと $(y-1)^2=2-t$ $2(y-1)dy=-dt$
$\begin{array}{c|c} t & 0 \to 2 \\ \hline y & 1+\sqrt{2}\to 1 \end{array}$

$$\int_0^2(g_1(t)-g_2(t))dt=2\int_{1+\sqrt{2}}^1\sqrt{y}\cdot\{-2(y-1)\}dy=4\int_1^{1+\sqrt{2}}(y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}})dy=4\left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_1^{1+\sqrt{2}}$$

$$=8\sqrt{1+\sqrt{2}}\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{5}-\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)-8\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=8\sqrt{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{9+6\sqrt{2}-5-5\sqrt{2}}{15}-8\cdot\frac{3-5}{15}$$

$$=\frac{8}{15}\left\{2+(4+\sqrt{2})\sqrt{1+\sqrt{2}}\right\}$$ ……(答)