1993 年東大理後期 $\boxed{1}$

(1)

求める行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。

P のひとつの頂点 $(1,0)$ は、A が表す一次変換で他の頂点 $(\cos k\theta, \sin k\theta)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ に移るから

$$\begin{pmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \therefore a=\cos k\theta,\ c=\sin k\theta$$

次に、P のひとつの頂点 $(\cos l\theta, \sin l\theta)$ $(l=0,1,\cdots,n-1)$ の、A が表す一次変換による像を考えると

$$\begin{pmatrix} \cos k\theta & b \\ \sin k\theta & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos k\theta\cos l\theta+b\sin l\theta \\ \sin k\theta\cos l\theta+d\sin l\theta \end{pmatrix}$$

これは P のいずれかの頂点に一致し、すなわち原点からの距離が 1 であるから

$$\begin{aligned}
&(\cos k\theta\cos l\theta+b\sin l\theta)^2+(\sin k\theta\cos l\theta+d\sin l\theta)^2 \\
&\quad=(\cos^2 k\theta+\sin^2 k\theta)\cos^2 l\theta+(b^2+d^2)\sin^2 l\theta+2(b\cos k\theta+d\sin k\theta)\cos l\theta\sin l\theta \\
&\quad=(1-\sin^2 l\theta)+(b^2+d^2)\sin^2 l\theta+2(b\cos k\theta+d\sin k\theta)\cos l\theta\sin l\theta=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(b^2+d^2-1)\sin^2 l\theta+2(b\cos k\theta+d\sin k\theta)\cos l\theta\sin l\theta=0 \\
&\sin l\theta\left\{(b^2+d^2-1)\sin l\theta+2(b\cos k\theta+d\sin k\theta)\cos l\theta\right\}=0
\end{aligned}$$

任意の l について成立するには　$(b^2+d^2-1)\sin l\theta+2(b\cos k\theta+d\sin k\theta)\cos l\theta=0$

$\sin l\theta, \cos l\theta$ が同時に 0 になることはないので

$$\therefore b^2+d^2-1=0,\ b\cos k\theta+d\sin k\theta=0 \quad \therefore (b,d)=(\pm\sin k\theta, \mp\cos k\theta)$$ （複号同順）

$A=\begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$ のとき、A は原点を中心とした角 $k\theta$ の回転を表すから、P の像は P に完全に重なる。

$A=\begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ \sin k\theta & -\cos k\theta \end{pmatrix}$ のとき、$A=\begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり、A は x 軸に関する対称移動と、原点を中心とした角 $k\theta$ の回転の合成変換を表す。P が $(1,0)$ を頂点に持つことから、P は x 軸に関して対称であり、P の像は P に完全に重なる。

以上により、求める行列は

$$\therefore \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi k}{n} & -\sin\dfrac{2\pi k}{n} \\ \sin\dfrac{2\pi k}{n} & \cos\dfrac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi k}{n} & \sin\dfrac{2\pi k}{n} \\ \sin\dfrac{2\pi k}{n} & -\cos\dfrac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} \ (k=0,1,\cdots,n-1)$$ ……（答）

(2)

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & \sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & -\cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\frac{2\pi k}{n} & 0 \\ 2\sin\frac{2\pi k}{n} & 0 \end{pmatrix}$$ より、求める和は $$\begin{pmatrix} 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n} & 0 \\ 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n} & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、

$$2\cos\frac{2\pi k}{n} = e^{i\frac{2\pi k}{n}} + e^{-i\frac{2\pi k}{n}},\ 2\sin\frac{2\pi k}{n} = \frac{e^{i\frac{2\pi k}{n}} - e^{-i\frac{2\pi k}{n}}}{i}$$

より

$$2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi k}{n}} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\frac{2\pi k}{n}},\ 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n} = \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi k}{n}} - \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\frac{2\pi k}{n}}$$

であり、

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi k}{n}} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0,\ \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\frac{2\pi k}{n}} = \frac{1-e^{-i2\pi}}{1-e^{-i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

であるから　$\therefore 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n} = 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n} = 0$

求める和は　$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ……(答)