1993年東大理後期 $\boxed{2}$

(1)

直線 l を $ax+by+c=0$ とおき、c を変化させたときの $f(l)$ の最小値を考える。

$$d(l,A)=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},\ d(l,B)=\frac{|ax_2+by_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},\ d(l,C)=\frac{|ax_3+by_3+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$f(l)=\frac{(ax_1+by_1+c)^2+(ax_2+by_2+c)^2+(ax_3+by_3+c)^2}{a^2+b^2}$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)f(l)&=3c^2+2\{a(x_1+x_2+x_3)+b(y_1+y_2+y_3)\}c+(ax_1+by_1)^2+(ax_2+by_2)^2+(ax_3+by_3)^2\\&=3\left\{c+\frac{a(x_1+x_2+x_3)+b(y_1+y_2+y_3)}{3}\right\}^2-\frac{\{a(x_1+x_2+x_3)+b(y_1+y_2+y_3)\}^2}{3}\\&\quad+(ax_1+by_1)^2+(ax_2+by_2)^2+(ax_3+by_3)^2\end{aligned}$$

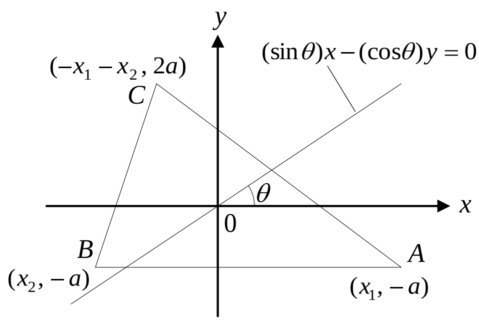
したがって、$f(l)$ を最小にする c は　$c=-\dfrac{a(x_1+x_2+x_3)+b(y_1+y_2+y_3)}{3}$

したがって、直線 l_0 は $ax+by-\dfrac{a(x_1+x_2+x_3)+b(y_1+y_2+y_3)}{3}=0$ となるから、

△ ABC の重心 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ を通る。（証明終）

(2)

(1)において、△ ABC の重心が原点 O に一致するように平行移動し、
さらに1辺が x 軸と平行になるように原点 O を中心に回転させても、
一般性を失わない。
このとき、$x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0$ であり、
$A(x_1,-a),B(x_2,-a),C(-x_1-x_2,2a)$ とおく。
また、直線 l を $(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおく。



$$\begin{aligned}f(l)&=\frac{|x_1\sin\theta+a\cos\theta|^2+|x_2\sin\theta+a\cos\theta|^2+|-(x_1+x_2)\sin\theta-2a\cos\theta|^2}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}\\&=x_1{}^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta+2ax_1\sin\theta\cos\theta+x_2{}^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta+2ax_2\sin\theta\cos\theta\\&\quad+(x_1+x_2)^2\sin^2\theta+4a^2\cos^2\theta+4a(x_1+x_2)\sin\theta\cos\theta\\&=2(x_1{}^2+x_2{}^2+x_1x_2)\sin^2\theta+6a^2\cos^2\theta+6a(x_1+x_2)\sin\theta\cos\theta\\&=(x_1{}^2+x_2{}^2+x_1x_2)(1-\cos2\theta)+3a^2(1+\cos2\theta)+3a(x_1+x_2)\sin2\theta\\&=3a^2+x_1{}^2+x_2{}^2+x_1x_2+3a(x_1+x_2)\sin2\theta+\{3a^2-(x_1{}^2+x_2{}^2+x_1x_2)\}\cos2\theta\end{aligned}$$

ここで、$p\sin2\theta+q\cos2\theta$ という形の式は $\sqrt{p^2+q^2}\sin(2\theta+\alpha)$ と変形できる。$p^2+q^2\neq0$ のとき、$0\leqq\theta<2\pi$

において、$p\sin2\theta+q\cos2\theta$ を最小にする θ が2つ存在するが、周期が π であるから直線 l の式は一致する。
すなわち、$f(l)$ を最小にする直線 l は1本のみである。

したがって、異なる 3 本の直線が $f(l)$ を最小にするには、 $p^2+q^2=0$ 、 $p=q=0$ である必要がある。

$$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=0 & \text{——①} \\ 3a^2-(x_1{}^2+x_2{}^2+x_1x_2)=0 & \text{——②} \end{cases}$$

①より　$x_2=-x_1$　②に代入して　$3a^2-x_1{}^2=0$

$x_1>0$ とすれば　$\therefore x_1=\sqrt{3}a, x_2=-\sqrt{3}a$　$\therefore A(\sqrt{3}a,-a), B(-\sqrt{3}a,-a), C(0,2a)$

したがって、 $AB=BC=CA=2\sqrt{3}a$ であるから、△ABCは正三角形である。（証明終）

なお、△ABCが正三角形であるとき、その重心を通る任意の直線lについて、 $f(l)$ は一定である。