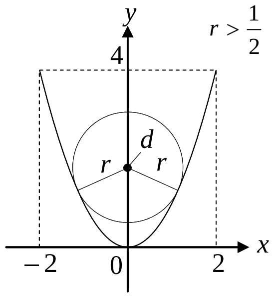
1993 年東大理後期 $\boxed{3}$

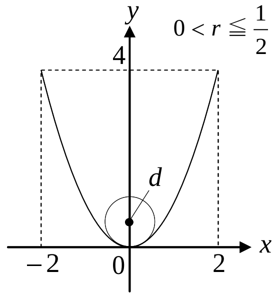
(1)

一般に、 $y=x^2$ を y 軸中心に回転してできる容器を考える。半径 r の球が容器につかえて止まったときの球の中心の座標を $P(0,d)$ 、接点を $Q(t,t^2)$ とする。 $\overline{PQ}$ の最小値が r に一致するので

$$\overline{PQ}=\sqrt{t^2+(t^2-d)^2}=\sqrt{t^4-(2d-1)t^2+d^2}=\sqrt{\left\{t^2-\left(d-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+d-\frac{1}{4}}$$

$d>\dfrac{1}{2}$ のとき　$\overline{PQ}$ は $t^2=d-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\sqrt{d-\dfrac{1}{4}}$ をとる。





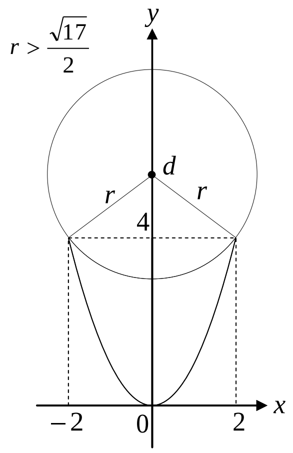
$\therefore r=\sqrt{d-\dfrac{1}{4}}$　$\therefore d=r^2+\dfrac{1}{4}$

$0<d\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$\overline{PQ}$ は $t^2=0$ で最小値 d をとる。

$\therefore d=r$

次に、 $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で考える。球がちょうど容器のふち、

すなわち $t=2$ において容器に接するとき、 $2^2=d-\dfrac{1}{2}$　$d=\dfrac{9}{2}$　$\therefore r=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$



したがって、 $r>\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ のとき、球は容器のふちからはみ出すから、

$\therefore d=4+\sqrt{r^2-4}$

$s=4-d$ より　$\therefore s=\begin{cases}4-r & \left(0<r\leqq\dfrac{1}{2}\right)\\ \dfrac{15}{4}-r^2 & \left(\dfrac{1}{2}<r\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)\\ -\sqrt{r^2-4} & \left(\dfrac{\sqrt{17}}{2}<r\right)\end{cases}$ ……(答)

(2)

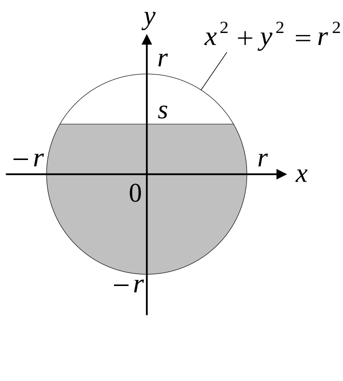
球を容器につかえるまでゆっくり入れ、水面と球の最上部が一致したとき

$$d+r=r^2+\frac{1}{4}+r=4\quad 4r^2+4r-15=0\quad (2r-3)(2r+5)=0\quad \therefore r=\frac{3}{2}$$

$0<r\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき、球全体が水没するから、 $f(r)$ は球の体積に等しく、 $\therefore f(r)=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

$\dfrac{3}{2}<r$ のとき、球の上部が水面より上に出る。このとき $f(r)$ は、

右図の網掛部を y 軸中心に回転して得られる立体の体積に等しい。



$$f(r)=\pi\int_{-r}^{s}(r^2-y^2)dy=\pi\left[r^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-r}^{s}=\pi\left(r^2s-\frac{s^3}{3}+\frac{2}{3}r^3\right)$$

$\dfrac{3}{2} < r \leqq \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ のとき

$$f(r) = \pi\left\{r^2\left(\frac{15}{4} - r^2\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{15}{4} - r^2\right)^3 + \frac{2}{3}r^3\right\} = \pi\left\{-r^4 + \frac{2}{3}r^3 + \frac{15}{4}r^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{15}{4} - r^2\right)^3\right\}$$

$$f'(r) = \pi\left\{-4r^3 + 2r^2 + \frac{15}{2}r - \left(\frac{15}{4} - r^2\right)^2 \cdot (-2r)\right\} = \pi r\left\{-4r^2 + 2r + \frac{15}{2} + 2\left(\frac{225}{16} - \frac{15}{2}r^2 + r^4\right)\right\}$$

$$= \pi r\left(2r^4 - 19r^2 + 2r + \frac{285}{8}\right) = \frac{\pi}{8}r(16r^4 - 152r^2 + 16r + 285) = \frac{\pi}{8}r(2r-5)(2r+3)(4r^2 + 4r - 19)$$

$\dfrac{3}{2} < r \leqq \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ において、$-2 < 2r - 5 \leqq \sqrt{17} - 5$ であり、$2r - 5 < 0$

$4r^2 + 4r - 19 = 0$ を解くと、$r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 76}}{4} = \dfrac{-2 \pm 4\sqrt{5}}{4} = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{5}$

$2 < \sqrt{5} < \dfrac{5}{2}$ より　$\dfrac{3}{2} < -\dfrac{1}{2} + \sqrt{5} < 2 < \dfrac{\sqrt{17}}{2}$　$\therefore \dfrac{3}{2} < -\dfrac{1}{2} + \sqrt{5} < \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

$\dfrac{3}{2} < r < -\dfrac{1}{2} + \sqrt{5}$ のとき　$4r^2 + 4r - 19 < 0$ であるから　$f'(r) > 0$

$-\dfrac{1}{2} + \sqrt{5} < r \leqq \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ のとき　$4r^2 + 4r - 19 > 0$ であるから　$f'(r) < 0$

$\dfrac{\sqrt{17}}{2} < r$ のとき

$$f(r) = \pi\left\{-r^2\sqrt{r^2 - 4} + \frac{1}{3}(r^2 - 4)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}r^3\right\}$$

$$f'(r) = \pi\left\{-2r\sqrt{r^2 - 4} + (-r^2) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - 4}} + \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4} \cdot (2r) + 2r^2\right\} = \pi\left\{2r^2 - r\sqrt{r^2 - 4} - \frac{r^3}{\sqrt{r^2 - 4}}\right\}$$

$$= 2\pi r \cdot \frac{r\sqrt{r^2 - 4} - (r^2 - 2)}{\sqrt{r^2 - 4}} = 2\pi r \cdot \frac{r^2(r^2 - 4) - (r^2 - 2)^2}{\sqrt{r^2 - 4}(r\sqrt{r^2 - 4} + r^2 - 2)} = -\frac{8\pi r}{\sqrt{r^2 - 4}(r\sqrt{r^2 - 4} + r^2 - 2)} < 0$$

$0 < r \leqq \dfrac{3}{2}$ においては、$f(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$　$\therefore f'(r) = 4\pi r^2 > 0$

以上により、$f(r)$ の増減は下の通り。$f(r)$ を最大にする r は　$\therefore r = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{5}$　……(答)

r	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2} + \sqrt{5}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{17}}{2}$	$\cdots$
$f'(r)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(r)$		$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$