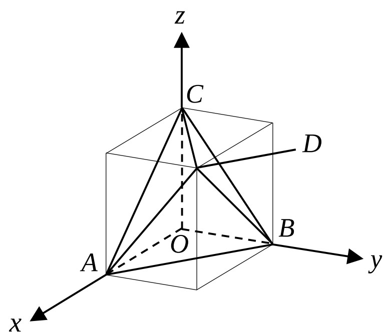
1993 年東大理 $\boxed{1}$



$A(a,\ 0,\ 0),\ B(0,\ b,\ 0),\ C(0,\ 0,\ c)$ と座標を設定すると、

$$\begin{cases} a^2+b^2=(2l-1)^2 \\ b^2+c^2=4l^2 \\ c^2+a^2=(2l+1)^2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a^2=2l^2+1 \\ b^2=2l(l-2) \\ c^2=2l(l+2) \end{cases}$$

もう 1 つの頂点 D は $D(a,\ b,\ c)$ とおける。実際、$\overrightarrow{AD}=(0,\ b,\ c),\ \overrightarrow{BD}=(a,\ 0,\ c),\ \overrightarrow{CD}=(a,\ b,\ 0)$ であるから

$$\therefore AD=\sqrt{b^2+c^2}=2l,\ BD=\sqrt{c^2+a^2}=2l+1,\ CD=\sqrt{a^2+b^2}=2l-1$$

四面体 $ABCD$ の体積は、$O,\ A,\ B,\ C,\ D$ を頂点に持つ直方体の体積から、四面体 $OABC$ の体積の 4 倍を引いた値に等しく、

$$V(l)=abc-4\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot c=\frac{1}{3}abc=\frac{1}{3}\sqrt{(2l^2+1)\cdot 2l(l-2)\cdot 2l(l+2)}=\frac{2}{3}l\sqrt{(2l^2+1)(l-2)(l+2)}$$

$$\frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}=\frac{2}{3}l\sqrt{(2l^2+1)(l+2)} \qquad \therefore \lim_{l\to 2}\frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{9\cdot 4}=8 \quad \cdots\cdots\text{(答)}$$

※すべての面が合同な四面体は、直方体の 4 つの頂点を結ぶことにより得られる。
　知っていれば計算が大幅に楽になる。