1993 年東大理 $\boxed{2}$

(1)

$a_1=1,\ a_2=3\quad a_3=3a_2-7a_1=2$ であるから、$a_1,\ a_2$ は奇数で、a_3 は偶数。

$a_{3k-2}=2p+1,\ a_{3k-1}=2q+1$ とすると　$a_{3k}=3a_{3k-1}-7a_{3k-2}=3(2q+1)-7(2p+1)=6q-14p-4$

したがって、a_{3k} は偶数。

$a_{3k-1}=2q+1,\ a_{3k}=2r$ とすると　$a_{3k+1}=3a_{3k}-7a_{3k-1}=3\cdot 2r-7(2q+1)=6r-14q-7$

したがって、a_{3k+1} は奇数。

$a_{3k}=2r,\ a_{3k+1}=2s+1$ とすると　$a_{3k+2}=3a_{3k+1}-7a_{3k}=3(2s+1)-7\cdot 2r=6s-14r+3$

したがって、a_{3k+2} は奇数。

$a_{3k+1},\ a_{3k+2}$ が奇数であるから、$a_{3k+3}=a_{3(k+1)}$ は偶数。

以上により、a_n が偶数であることと、n が 3 の倍数であることは同値。（証明終）

(2)

$a_n=5q_n+r_n$ とおく。r_n は a_n を 5 で割った余りであり、$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のいずれかである。

$$a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n=3(5q_{n+1}+r_{n+1})-7(5q_n+r_n)=5(3q_{n+1}-7q_n)+3r_{n+1}-7r_n$$

したがって、a_{n+2} を 5 で割った余りは、$3r_{n+1}-7r_n$ を 5 で割った余りに等しい。

$3r_{n+1}-7r_n$ を 5 で割った余りを r_{n+2} と定義する。$r_1=1,\ r_2=3$ であるから

$3r_2-7r_1=2\quad \therefore r_3=2\quad 3r_3-7r_2=-15=5(-3)\quad \therefore r_4=0\quad 3r_4-7r_3=-14=5(-3)+1\quad \therefore r_5=1$

$3r_5-7r_4=3\quad \therefore r_6=3$

したがって、以下帰納的に、r_n は $1,\ 3,\ 2,\ 0,\ 1,\ 3,\ 2,\ 0,\ \cdots$ の繰り返しとなる。

n が 4 の倍数のとき、a_n は 5 の倍数である。

a_n が 10 の倍数であるとき、a_n は偶数かつ 5 の倍数である。

このとき、(1) より、n は 3 の倍数かつ 4 の倍数。すなわち、n は 12 の倍数である。

以上により、a_n が 10 の倍数であることと、n が 12 の倍数であることは同値。（証明終）