1993年東大理 $\boxed{3}$

$A(-5,\ 5),\ B(-5,\ -5),\ C(5,\ 5),\ D(5,\ -5)$ とする。
PA と QC の延長がぶつかる点を $S(-3,\ 9)$ とし、PB と QD の延長がぶつかる点を $T(3,\ -9)$ とする。

i） R が正方形 $PSQT$ の外部にあるとき
R は PQ の垂直二等分線上にあり、$d(P,\ R),\ d(Q,\ R)$ はともに $PR,\ QR$ に等しいから、
$(x+9)^2+(y+3)^2=(x-9)^2+(y-3)^2 \quad 3x+y=-3x-y \quad \therefore y=-3x$ ――①
①は点 $S,\ T$ を通る。

ii） R が正方形 $PSQT$ の内部にあるとき
R が三角形 PAB または三角形 QCD の内部にあるとき、明らかに $d(P,\ R)\neq d(Q,\ R)$ であるから、
$-5<x<5$ で考えてよい。

$d(P,\ R)$ は、$PA+AR$ か $PB+BR$ のいずれかに等しい。
$PA=4\sqrt{5},\ PB=2\sqrt{5}$ であり、$PA+AR=PB+BR$ とすると

$$4\sqrt{5}+\sqrt{(x+5)^2+(y-5)^2}=2\sqrt{5}+\sqrt{(x+5)^2+(y+5)^2} \quad 2\sqrt{5}+\sqrt{(x+5)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x+5)^2+(y+5)^2}$$

$$20+(x+5)^2+(y-5)^2+4\sqrt{5}\sqrt{(x+5)^2+(y-5)^2}=(x+5)^2+(y+5)^2 \quad \sqrt{(x+5)^2+(y-5)^2}=\sqrt{5}(y-1)$$

$y>1$ として　$(x+5)^2+(y-5)^2=5(y-1)^2 \quad 4y^2-(x+5)^2=20 \quad \therefore \dfrac{y^2}{5}-\dfrac{(x+5)^2}{20}=1\ (y>0)$ ――②

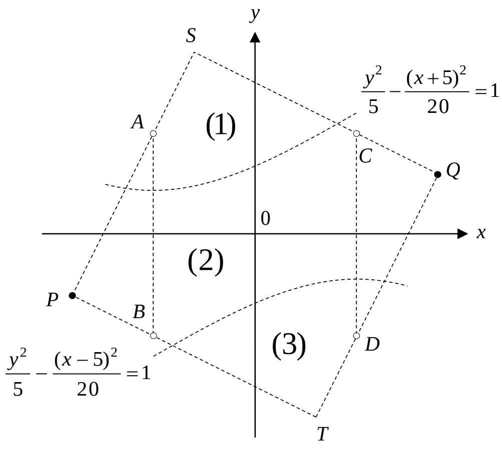
$d(Q,\ R)$ は、$QC+CR$ か $QD+DR$ のいずれかに等しい。
$QC=2\sqrt{5},\ QD=4\sqrt{5}$ であり、$QC+CR=QD+DR$ とすると

$$2\sqrt{5}+\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}=4\sqrt{5}+\sqrt{(x-5)^2+(y+5)^2} \quad \sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}=2\sqrt{5}+\sqrt{(x-5)^2+(y+5)^2}$$

$$(x-5)^2+(y-5)^2=20+(x-5)^2+(y+5)^2+4\sqrt{5}\sqrt{(x-5)^2+(y+5)^2} \quad \sqrt{(x-5)^2+(y+5)^2}=-\sqrt{5}(y+1)$$

$y<-1$ として　$(x-5)^2+(y+5)^2=5(y+1)^2 \quad 4y^2-(x-5)^2=20 \quad \therefore \dfrac{y^2}{5}-\dfrac{(x-5)^2}{20}=1\ (y<0)$ ――③

②、③より
R が(1)の領域にあるとき　$d(P,\ R)=PA+AR,\ d(Q,\ R)=QC+CR$
R が(2)の領域にあるとき　$d(P,\ R)=PB+BR,\ d(Q,\ R)=QC+CR$
R が(3)の領域にあるとき　$d(P,\ R)=PB+BR,\ d(Q,\ R)=QD+DR$



R が(1)の領域にあるとき

$4\sqrt{5}+\sqrt{(x+5)^2+(y-5)^2}=2\sqrt{5}+\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}$　$2\sqrt{5}+\sqrt{(x+5)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}$

$20+(x+5)^2+(y-5)^2+4\sqrt{5}\sqrt{(x+5)^2+(y-5)^2}=(x-5)^2+(y-5)^2$　$\sqrt{(x+5)^2+(y-5)^2}=-\sqrt{5}(x+1)$

$x<-1$ として　$(x+5)^2+(y-5)^2=5(x+1)^2$　$4x^2-(y-5)^2=20$　$\therefore \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{(y-5)^2}{20}=1\ (x<0)$ ――④

R が(2)の領域にあるとき

$2\sqrt{5}+\sqrt{(x+5)^2+(y+5)^2}=2\sqrt{5}+\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}$　$(x+5)^2+(y+5)^2=(x-5)^2+(y-5)^2$

$x+y=-x-y$　$\therefore y=-x$ ――⑤

R が(3)の領域にあるとき

$2\sqrt{5}+\sqrt{(x+5)^2+(y+5)^2}=4\sqrt{5}+\sqrt{(x-5)^2+(y+5)^2}$　$\sqrt{(x+5)^2+(y+5)^2}=2\sqrt{5}+\sqrt{(x-5)^2+(y+5)^2}$

$(x+5)^2+(y+5)^2=20+(x-5)^2+(y+5)^2+4\sqrt{5}\sqrt{(x-5)^2+(y+5)^2}$　$\sqrt{(x-5)^2+(y+5)^2}=\sqrt{5}(x-1)$

$x>1$ として　$(x-5)^2+(y+5)^2=5(x-1)^2$　$4x^2-(y+5)^2=20$　$\therefore \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{(y+5)^2}{20}=1\ (x>0)$ ――⑥

以上①～⑥より、R の軌跡を図示すると下の通り。④、⑥は双曲線の一部である。