1993年東大理$\boxed{5}$

元の文字列Sの中の「1」を、第n回目の写しS_nにおいて「1」と書き写す確率をa_nとする。
第n回目において「1」と書き写したとき、第$n+1$回目に確率$1-q$で「1」と書き写す。
第n回目において「0」と書き写したとき、第$n+1$回目に確率pで「1」と書き写す。

$$a_{n+1}=(1-q)a_n+p(1-a_n)=(1-p-q)a_n+p$$

$p+q=1$のとき　$a_{n+1}=p$となる。$a_1=1-q=p$であるから$a_n=p$で一定。

$p+q\neq 1$のとき　$a_{n+1}-\dfrac{p}{p+q}=(1-p-q)\left(a_n-\dfrac{p}{p+q}\right)$

$$a_n-\frac{p}{p+q}=(1-p-q)^{n-1}\left(1-q-\frac{p}{p+q}\right)=\frac{q(1-p-q)}{p+q}(1-p-q)^{n-1}=\frac{q}{p+q}(1-p-q)^n$$

$$\therefore a_n=\frac{p}{p+q}+\frac{q}{p+q}(1-p-q)^n$$

元の文字列Sの中の「0」を、第n回目の写しS_nにおいて「0」と書き写す確率をb_nとする。
同様に　$b_{n+1}=(1-p)b_n+q(1-b_n)=(1-p-q)b_n+q$

$p+q=1$のとき　$b_{n+1}=q$となる。$b_1=1-p=q$であるから$b_n=q$で一定。

$p+q\neq 1$のとき　$b_{n+1}-\dfrac{q}{p+q}=(1-p-q)\left(b_n-\dfrac{q}{p+q}\right)$

$$b_n-\frac{q}{p+q}=(1-p-q)^{n-1}\left(1-p-\frac{q}{p+q}\right)=\frac{p(1-p-q)}{p+q}(1-p-q)^{n-1}=\frac{p}{p+q}(1-p-q)^n$$

$$\therefore b_n=\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}(1-p-q)^n$$

$C(n)=(a_n)^3(b_n)^2$で与えられる。
$p+q=1$のとき　$a_n=p,\ b_n=q$であるから　$C(n)=p^3q^2$で、一定。
$p+q\neq 1$のとき　$0<p+q<2$であるから、$-1<1-p-q<1$である。

したがって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{p}{p+q},\ \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{q}{p+q}$であるから　$\displaystyle\therefore\lim_{n\to\infty}C(n)=\left(\frac{p}{p+q}\right)^3\left(\frac{q}{p+q}\right)^2=\frac{p^3q^2}{(p+q)^5}$

これは$p+q=1$のときと一致する。

以上により、いずれにしても　$\displaystyle\therefore\lim_{n\to\infty}C(n)=\frac{p^3q^2}{(p+q)^5}$　……(答)