1993 年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$x(t)=2\cos t+\cos 2t,\ y(t)=\sin 2t$ とすると　$\dfrac{dx}{dt}=x'(t)=-2\sin t-2\sin 2t,\ \dfrac{dy}{dt}=y'(t)=2\cos 2t$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4\sin^2 t+8\sin t\sin 2t+4\sin^2 2t+4\cos^2 2t=4+4\sin^2 t+16\sin^2 t\cos t$$

$$=4+4(1-\cos^2 t)+16(1-\cos^2 t)\cos t=-16\cos^3 t-4\cos^2 t+16\cos t+8$$

$f(u)=-16u^3-4u^2+16u+8$ とおき、$-1\leqq u\leqq 1$における増減を調べる。

$f'(u)=-48u^2-8u+16=-8(3u+2)(2u-1)$

$f(\pm 1)=4$　$f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{128}{27}-\dfrac{16}{9}-\dfrac{32}{3}+8=\dfrac{8}{27}$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2-1+8+8=13$

u	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(u)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(u)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(u)$ の最大値は13、最小値は $\dfrac{8}{27}$ であるから、P の速さの最大値は $\sqrt{13}$、最小値は $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$ ……(答)

(2)

$x'(t)=-2\sin t-2\sin 2t=-2\sin t(1+2\cos t)$　$x'(t)=0$ のとき、$\sin t=0$ または $\cos t=-\dfrac{1}{2}$ で、$t=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

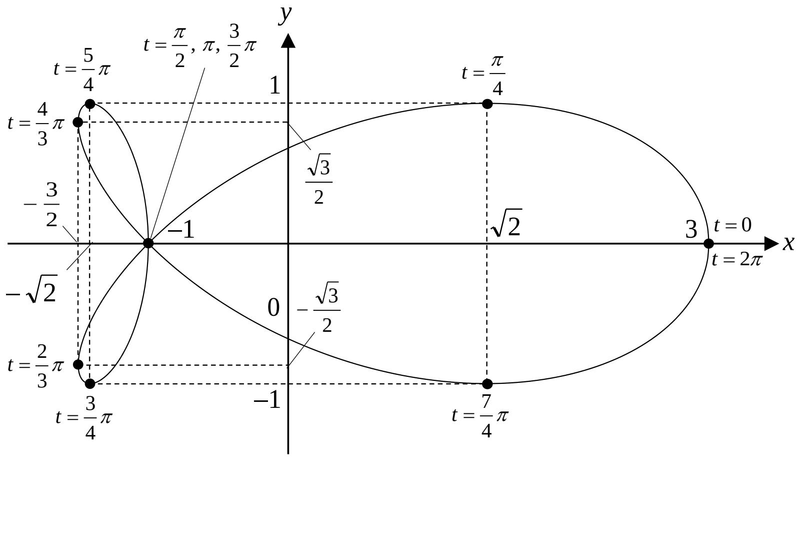
$y(t)$ は $t=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$ で最大、$t=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ で最小、$t=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ で0となる。

$x(t),\ y(t)$ の増減をまとめると下記の通り。$x(t),\ y(t)$ のいずれかが極値をとる点、$y(t)=0$ となる点を求めた。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$x'(t)$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$y'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x(t)$	3	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	3
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

$0\leqq t<2\pi$ における P の軌跡の概形は、右図のようになる。

これより、P が2回以上通過する点は $(-1,\ 0)$ のみである。(証明終)



P が $(-1,\ 0)$ を通過するのは $t=\dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ のときであるから、

各時刻の速度ベクトル $(x'(t),\ y'(t))$ は

$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $(-2,\ -2)$ 、 $t=\pi$ のとき $(0,\ 2)$、 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき $(2,\ -2)$ ……（答）

図示すると右の通り。