1994 年東大文 $\boxed{1}$

(1)

$\log_2 x \leqq 2 + \log_2 y \leqq \log_2 x + \log_2 (4-2x)$

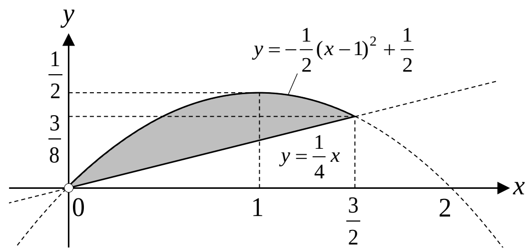
真数条件により　$x>0,\ y>0,\ 4-2x>0$　$\therefore 0<x<2,\ y>0$ ——①

$\log_2 x \leqq \log_2 4y \leqq \log_2 x(4-2x)$ より　$x \leqq 4y \leqq x(4-2x)$　$\therefore \frac{1}{4}x \leqq y \leqq \frac{1}{2}x(2-x)$ ——②

$\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}x(2-x)$ とすると　$x=2x(2-x)$　$2x^2-3x=x(2x-3)=0$　$\therefore x=0,\ \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}x(2-x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$ より、D を図示すると右図の通り。

境界線は、原点を除き含む。



(2)

$y-sx=k$ とおくと、$y=sx+k$ であり、傾きが s 、切片が k の直線を表す。

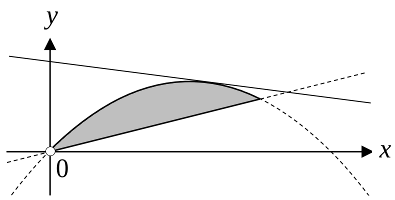
$g(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$ とすると　$g'(x)=1-x$　$g'(x)<1$ のとき　$\therefore x>0$

$g'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ であり、$g'(x)$ は x に対して単調減少であるから

$-\frac{1}{2}<s<1$ のとき　k が最大になるのは、$y=sx+k$ が $y=g(x)$ に接するとき。

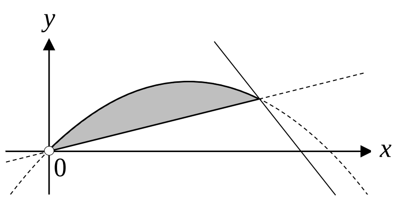
$\frac{1}{2}x(2-x)=sx+k$　$x^2+2(s-1)x+2k=0$　$D/4=(s-1)^2-2k=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}(s-1)^2$



$s \leqq -\frac{1}{2}$ のとき　k が最大になるのは、$y=sx+k$ が点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{8}\right)$ を通るとき。

$\therefore k=\frac{3}{8}-\frac{3}{2}s$



以上により

$s \leqq -\frac{1}{2}$ のとき $f(s)=-\frac{3}{2}s+\frac{3}{8}$、$-\frac{1}{2}<s<1$ のとき $f(s)=\frac{1}{2}(s-1)^2$ ……(答)

$t=f(s)$ のグラフは右図の通り。