1994 年東大理後期 $\boxed{1}$

(1)

m に関する数学的帰納法で示す。

$m=1$ のとき　$[1]_1=1$　$[1,\ 0]_2=1\cdot 2!-1=1$　　したがって $m=1$ で成立。

$m=k$ のとき　$[k,\ k-1,\ \cdots,\ 1]_k=[1,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{k+1}-1$ と仮定する。両辺に $(k+1)\cdot(k+1)!$ を加えると

$$[k,\ k-1,\ \cdots,\ 1]_k+(k+1)\cdot(k+1)!=[k+1,\ k,\ k-1,\ \cdots,\ 1]_{k+1}$$

$$[1,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{k+1}-1+(k+1)\cdot(k+1)!=(k+1)!+(k+1)\cdot(k+1)!-1=(k+2)!-1$$

したがって $m=k+1$ でも成立。以上より示された。（証明終）

(2)

(1) より、$[1,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{m+1}-1=[m,\ m-1,\ \cdots,\ 1]_m$ で、このとき $a_m,\ a_{m-1},\ \cdots,\ a_1$ は取り得る最大値である。

したがって、$m\geqq 2$ のとき、$m!-1$ という形の自然数は、$[m-1,\ m-2,\ \cdots,\ 1]_{m-1}$ の 1 通りに表示される。

今、$m\geqq 2$ において 1 から $m!-1$ までのすべての自然数が 1 通りに表示されるとき、$m!$ から $(m+1)!-1$ までのすべての自然数は 1 通りに表示されることを示す。

$[a_m,\ a_{m-1},\ \cdots,\ a_1]_m=[a_m,\ 0,\ \cdots,\ 0]_m+[a_{m-1},\ a_{m-2},\ \cdots,\ a_1]_{m-1}$ であるから、

$m!$ は、$[1,\ 0,\ \cdots,\ 0]_m$ の 1 通りに表示される。$m!+1,\ m!+2,\ \cdots,\ 2m!-1$ も 1 通りに表示される。

$2m!$ は、$[2,\ 0,\ \cdots,\ 0]_m$ の 1 通りに表示される。$2m!+1,\ 2m!+2,\ \cdots,\ 3m!-1$ も 1 通りに表示される。

以下同様に、$m!$ から $(m+1)!-1$ までの自然数は $p\cdot m!+q\ (1\leqq p\leqq m, 0\leqq q\leqq m!-1)$ という形になるから、

すべて 1 通りに表示される。

一方、$1=1\cdot 1!=[1]_1$ であり、1 から $2!-1$ まで 1 通りに表示される。

$2=1\cdot 2!=[1,\ 0]_2$、$3=1\cdot 2!+1\cdot 1!=[1,\ 1]_2$、$4=2\cdot 2!=[2,\ 0]_2$、$5=2\cdot 2!+1\cdot 1!=[2,\ 1]_2$ と表せて、

$2!$ から $3!-1$ まで 1 通りに表示されるので、1 から $3!-1$ まで 1 通りに表示される。

以下帰納的に、すべての自然数が 1 通りに表示される。（証明終）

(3)

$\dfrac{n!}{5}-(n-1)!=\dfrac{(n-1)!(n-5)}{5}\geqq 0\ (\because n\geqq 5)$ より $(n-1)!\leqq\dfrac{n!}{5}<n!$

$a_m,\ a_{m-1},\ \cdots$ の順に、i 以下の最大の非負整数となるように a_i を定めればよい。以下、$k\geqq 1$ として

$n=5k$ のとき

$$\frac{n!}{5}=k\cdot(n-1)!\quad (n-1)-k=(n-1)-\frac{n}{5}=\frac{4n-5}{5}>0 \text{ より}\quad \therefore\frac{n!}{5}=\left[\frac{n}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}$$

$n=5k+1$のとき

$\frac{n!}{5}=n\cdot k\cdot(n-2)!\quad \frac{n!}{5(n-1)!}=\frac{n}{5}=k+\frac{1}{5}\quad (n-1)-k=(n-1)-\frac{n-1}{5}=\frac{4n-4}{5}>0$ より、$(n-1)!$の係数はk。

$n\cdot k\cdot(n-2)!-k\cdot(n-1)!=k\cdot(n-2)!\{n-(n-1)\}=k\cdot(n-2)!$

$(n-2)-k=(n-2)-\frac{n-1}{5}=\frac{4n-9}{5}>0$ より、$(n-2)!$の係数はk。

$\therefore \frac{n!}{5}=\left[\frac{n-1}{5},\ \frac{n-1}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}$

$n=5k+2$のとき

$\frac{n!}{5}=n(n-1)\cdot k\cdot(n-3)!\quad \frac{n!}{5(n-1)!}=\frac{n}{5}=k+\frac{2}{5}$

$(n-1)-k=(n-1)-\frac{n-2}{5}=\frac{4n-3}{5}>0$ より、$(n-1)!$の係数はk。

$n(n-1)\cdot k\cdot(n-3)!-k\cdot(n-1)!=k\cdot(n-1)(n-3)!\{n-(n-2)\}=2k\cdot(n-1)(n-3)!$

$\frac{2k\cdot(n-1)(n-3)!}{(n-2)!}=\frac{2k\cdot(n-1)}{n-2}=\frac{2(n-1)}{5}=2k+\frac{2}{5}$

$(n-2)-2k=(n-2)-\frac{2(n-2)}{5}=\frac{3n-6}{5}>0$ より、$(n-2)!$の係数は$2k$。

$2k\cdot(n-1)(n-3)!-2k\cdot(n-2)!=2k\cdot(n-3)!\{(n-1)-(n-2)\}=2k\cdot(n-3)!$

$(n-3)-2k=(n-3)-\frac{2(n-2)}{5}=\frac{3n-11}{5}>0$ より、$(n-3)!$の係数は$2k$。

$\therefore \frac{n!}{5}=\left[\frac{n-2}{5},\ \frac{2n-4}{5},\ \frac{2n-4}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}$

$n=5k+3$のとき

$\frac{n!}{5}=n(n-1)(n-2)\cdot k\cdot(n-4)!\quad \frac{n!}{5(n-1)!}=\frac{n}{5}=k+\frac{3}{5}$

$(n-1)-k=(n-1)-\frac{n-3}{5}=\frac{4n-2}{5}>0$ より、$(n-1)!$の係数はk。

$n(n-1)(n-2)\cdot k\cdot(n-4)!-k\cdot(n-1)!=k\cdot(n-1)(n-2)(n-4)!\{n-(n-3)\}=3k\cdot(n-1)(n-2)(n-4)!$

$\frac{3k\cdot(n-1)(n-2)(n-4)!}{(n-2)!}=\frac{3k\cdot(n-1)}{n-3}=\frac{3(n-1)}{5}=3k+\frac{6}{5}$

$(n-2)-(3k+1)=(n-2)-\frac{3n-4}{5}=\frac{2n-6}{5}>0$ より、$(n-2)!$の係数は$3k+1$。

$3k\cdot(n-1)(n-2)(n-4)!-(3k+1)\cdot(n-2)!$
$=(n-2)(n-4)!\{3k\cdot(n-1)-(3k+1)\cdot(n-3)\}=(n-2)(n-4)!\{6k-(n-3)\}=k\cdot(n-2)(n-4)!$

$\frac{k\cdot(n-2)(n-4)!}{(n-3)!}=\frac{k\cdot(n-2)}{n-3}=\frac{n-2}{5}=k+\frac{1}{5}$

$$(n-3)-k=(n-3)-\frac{n-3}{5}=\frac{4n-12}{5}>0$$ より、$(n-3)!$の係数はk。

$$k\cdot(n-2)(n-4)!-k\cdot(n-3)!=k\cdot(n-4)!\{(n-2)-(n-3)\}=k\cdot(n-4)!$$

$$(n-4)-k=(n-4)-\frac{n-3}{5}=\frac{4n-17}{5}>0$$ より、$(n-4)!$の係数はk。

$$\therefore\frac{n!}{5}=\left[\frac{n-3}{5},\ \frac{3n-4}{5},\ \frac{n-3}{5},\ \frac{n-3}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}$$

$n=5k+4$のとき

$$\frac{n!}{5}=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot k\cdot(n-5)! \quad \frac{n!}{5(n-1)!}=\frac{n}{5}=k+\frac{4}{5}$$

$$(n-1)-k=(n-1)-\frac{n-4}{5}=\frac{4n-1}{5}>0$$ より、$(n-1)!$の係数はk。

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot k\cdot(n-5)!-k\cdot(n-1)!$$
$$=k\cdot(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)!\{n-(n-4)\}=4k\cdot(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)!$$

$$\frac{4k\cdot(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)!}{(n-2)!}=\frac{4k\cdot(n-1)}{n-4}=\frac{4(n-1)}{5}=4k+\frac{12}{5}$$

$$(n-2)-(4k+2)=(n-2)-\frac{4n-6}{5}=\frac{n-4}{5}>0$$ より、$(n-2)!$の係数は$4k+2$。

$$4k\cdot(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)!-(4k+2)\cdot(n-2)!$$
$$=(n-2)(n-3)(n-5)!\{4k\cdot(n-1)-(4k+2)\cdot(n-4)\}=(n-2)(n-3)(n-5)!\{12k-2(n-4)\}$$
$$=2k\cdot(n-2)(n-3)(n-5)!$$

$$\frac{2k\cdot(n-2)(n-3)(n-5)!}{(n-3)!}=\frac{2k\cdot(n-2)}{n-4}=\frac{2(n-2)}{5}=2k+\frac{4}{5}$$

$$(n-3)-2k=(n-3)-\frac{2(n-4)}{5}=\frac{3n-7}{5}>0$$ より、$(n-3)!$の係数は$2k$。

$$2k\cdot(n-2)(n-3)(n-5)!-2k\cdot(n-3)!=2k\cdot(n-3)(n-5)!\{(n-2)-(n-4)\}=4k\cdot(n-3)(n-5)!$$

$$\frac{4k\cdot(n-3)(n-5)!}{(n-4)!}=\frac{4k\cdot(n-3)}{n-4}=\frac{4(n-3)}{5}=4k+\frac{4}{5}$$

$$(n-4)-4k=(n-4)-\frac{4(n-4)}{5}=\frac{n-4}{5}>0$$ より、$(n-4)!$の係数は$4k$。

$$4k\cdot(n-3)(n-5)!-4k\cdot(n-4)!=4k\cdot(n-5)!\{(n-3)-(n-4)\}=4k\cdot(n-5)!$$

$$(n-5)-4k=(n-5)-\frac{4(n-4)}{5}=\frac{n-9}{5}\geqq 0$$ より、$(n-5)!$の係数は$4k$。

$$\therefore\frac{n!}{5}=\left[\frac{n-4}{5},\ \frac{4n-6}{5},\ \frac{2n-8}{5},\ \frac{4n-16}{5},\ \frac{4n-16}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}$$

以上により

$n=5k$のとき　$\dfrac{n!}{5}=\left[\dfrac{n}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}$

$n=5k+1$のとき　$\dfrac{n!}{5}=\left[\dfrac{n-1}{5},\ \dfrac{n-1}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}$

$n=5k+2$のとき　$\dfrac{n!}{5}=\left[\dfrac{n-2}{5},\ \dfrac{2n-4}{5},\ \dfrac{2n-4}{5},\ 0,\cdots,\ 0\right]_{n-1}$　……(答)

$n=5k+3$のとき　$\dfrac{n!}{5}=\left[\dfrac{n-3}{5},\ \dfrac{3n-4}{5},\ \dfrac{n-3}{5},\ \dfrac{n-3}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}$

$n=5k+4$のとき　$\dfrac{n!}{5}=\left[\dfrac{n-4}{5},\ \dfrac{4n-6}{5},\ \dfrac{2n-8}{5},\ \dfrac{4n-16}{5},\ \dfrac{4n-16}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}$