1994年東大理後期$\boxed{2}$

(1)

円が左下角を出発し、右下角に到達するまでに、円の中心が移動した距離は$l-2$であるから、この間にPが時計回りに回転した角度は$\dfrac{l-2}{1}=l-2$である。ただし、角度はラジアンで表す。

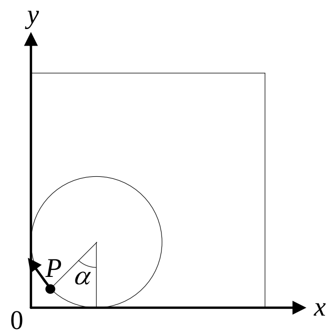
以下、円が右下角から右上角、右上角から左上角、左上角から左下角へ移動するときも、Pは時計回りであるから、円が最初に左下角に戻ってきたとき、Pの総回転角度は$4(l-2)$である。

Pの始点と終点が一致する条件は、$4(l-2)$が円周の整数倍であることであるから、kを自然数として

$$4(l-2)=2\pi k \quad l-2=\frac{\pi}{2}k \quad \therefore l=\frac{\pi}{2}k+2\ (k=1,2,3,\cdots)$$ ……(答)

(2)

$l=\dfrac{\pi}{2}+2$である。



円が左下にあるとき、Pの初期回転角αを図のように定義する。
ただし、時計回りを正とし、$0\leqq\alpha<2\pi$とする。
Pがθ回転したとき、Pの座標は

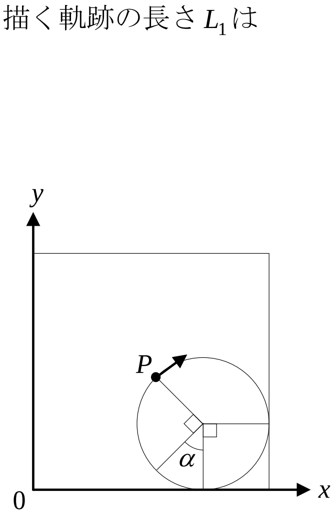
$$x=1+\theta-\sin(\theta+\alpha),\ y=1-\cos(\theta+\alpha)$$

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos(\theta+\alpha),\ \frac{dy}{d\theta}=\sin(\theta+\alpha)$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=2-2\cos(\theta+\alpha)=4\sin^2\frac{\theta+\alpha}{2} \quad \therefore\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=2\left|\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\right|$$

円が左下角から右下角に到達するまでに、Pは$\dfrac{\pi}{2}$回転するので、この間にPが描く軌跡の長さL_1は

$$\therefore L_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\right|d\theta$$ ――①



次に、円が右下角から右上角に到達するまでに、Pが描く軌跡の長さL_2は、①において初期回転角αを$\pi+\alpha$で置き換えればよいから、

$$\therefore L_2=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\frac{\theta+\pi+\alpha}{2}\right|d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\right|d\theta$$ ――②

対称性により、Pが最初に始点に戻るまでの軌跡の長さLは

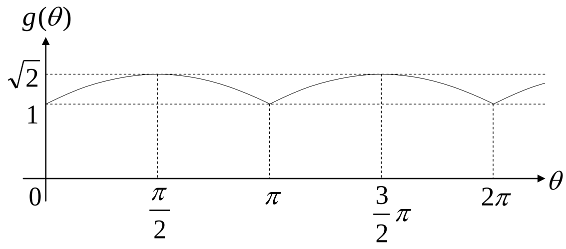
$$\therefore L=2(L_1+L_2)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left|\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\right|+\left|\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\right|\right)d\theta=4\int_\alpha^{\alpha+\frac{\pi}{2}}\left(\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|+\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\right)d\theta$$

ここで、$g(\theta)=\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|+\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$、$f(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}g(\theta)d\theta$ とする。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　$g(\theta)=\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}\sin\left\{\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$g(\theta+\pi)=\left|\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right|+\left|\cos\frac{\theta+\pi}{2}\right|=\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|+\left|-\sin\frac{\theta}{2}\right|=g(\theta)$ より、$g(\theta)$ の周期は π 。

$g(\theta)$ のグラフは図の通り。



$f(\alpha)$ は、$g(\theta)$ のグラフ、直線 $\theta=\alpha$ 、直線 $\theta=\alpha+\frac{\pi}{2}$ 、θ 軸で囲まれた部分の面積を表す。$g(\theta)$ のグラフの対称性から、$f(\alpha)$ は $\alpha=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$ のとき最大、$\alpha=\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$ のとき最小。

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}g(\theta)d\theta=2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left\{\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}d\theta=-4\sqrt{2}\left[\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=4\sqrt{2}\cos\frac{3}{8}\pi=4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}$$

$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ より　$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=2\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}g(\theta)d\theta=2\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\left\{\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}d\theta=-4\sqrt{2}\left[\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=-4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4-4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}=4-2\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$L=4f(\alpha)$ であるから、以上により

$\therefore 16-8\sqrt{4-2\sqrt{2}}\leqq L\leqq 8\sqrt{4-2\sqrt{2}}$　……(答)