1994年東大理後期 $\boxed{3}$

(1)

第1・第2工程を①・②、欠陥あり・なしを×・○と表すとき、1週間以内、すなわち6日以内で工事が終了するパターンは以下の3通りである。

	月	火	水	木	金	土
i)	①	②	検 ○	—	—	—
ii)	①	②	検 ②×	②	検 ○	—
iii)	①	②	検 ①×	①	②	検 ○

第1工程に欠陥があれば、第2工程の検査結果に関わらず第1工程からやり直しになるので、

$\therefore P(1)=(1-p)(1-p)+(1-p)p(1-p)+p(1-p)(1-p)=(1+2p)(1-p)^2$ ……(答)

(2)

第1・第2工程の両方を a 回行い、第2工程のみを b 回行って工事を終了する確率は、

$q(a,b)=p^{a-1}(1-p)p^b(1-p)=(1-p)^2p^{a+b-1}$

と表される。このとき、工事が終了するまでに要した日数は $3a+2b$ 日であり、

$3a+2b\leqq 6n \quad a\geqq 1 \quad b\geqq 0$

を満たすすべての整数の組 (a,b) について、$q(a,b)$ の和をとったものが $P(n)$ に等しい。

$0\leqq b\leqq 3n-\dfrac{3}{2}a$ より $1\leqq a\leqq 2n$ で、a を固定して考えると

$a=1$のとき　$0\leqq b\leqq 3n-2$
$a=2$のとき　$0\leqq b\leqq 3n-3$
$\vdots$　$\vdots$
$a=2k-1$のとき　$0\leqq b\leqq 3n-3k+1$
$a=2k$のとき　$0\leqq b\leqq 3n-3k$
$\vdots$　$\vdots$
$a=2n-1$のとき　$0\leqq b\leqq 1$
$a=2n$のとき　$b=0$

$a=2k-1$ および $a=2k$ のときの、すべての b についての $q(a,b)$ の和を $Q(k)$ とすると、

$$\therefore Q(k)=\sum_{b=0}^{3n-3k+1}q(2k-1,b)+\sum_{b=0}^{3n-3k}q(2k,b)=(1-p)^2p^{2k-2}\sum_{b=0}^{3n-3k+1}p^b+(1-p)^2p^{2k-1}\sum_{b=0}^{3n-3k}p^b$$
$$=(1-p)^2p^{2k-2}\cdot\frac{1-p^{3n-3k+2}}{1-p}+(1-p)^2p^{2k-1}\cdot\frac{1-p^{3n-3k+1}}{1-p}$$
$$=(1-p)(p^{2k-2}-p^{3n-k})+(1-p)(p^{2k-1}-p^{3n-k})=(1-p)(1+p)p^{2k-2}-2(1-p)p^{3n-k}$$
$$=(1-p^2)p^{2(k-1)}-2(1-p)p^{3n-k}$$

$P(n)=\sum_{k=1}^{n}Q(k)$ であるから、

$$\therefore P(n)=\sum_{k=1}^{n}Q(k)=(1-p^2)\sum_{k=1}^{n}p^{2(k-1)}-2(1-p)p^{3n}\sum_{k=1}^{n}p^{-k}=(1-p^2)\cdot\frac{1-p^{2n}}{1-p^2}-2(1-p)p^{3n}\cdot\frac{p^{-1}(1-p^{-n})}{1-p^{-1}}$$

$$=1-p^{2n}+2p^{3n}(1-p^{-n})=1-3p^{2n}+2p^{3n}\quad\cdots\cdots(答)$$

$P(1)=(1+2p)(1-p)^2=1-3p^2+2p^3$ であるから、$n=1$ でも成立。

(3)

$$1-P(n)=3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}=\frac{1}{2^{2n}}\left(3-\frac{2}{2^n}\right)>\frac{1}{2^{2n}}\left(3-\frac{2}{2}\right)=\frac{1}{2^{2n-1}}$$

より、

$$\frac{1}{2^{2n-1}}<1-P(n)<\frac{1}{1000}\qquad 2^{2n-1}>1000$$

$2^9=512,\ 2^{10}=1024$ であるから、$2n-1\geqq 10$、$n\geqq 6$ である必要がある。

$$1-P(6)=\frac{1}{2^{12}}\left(3-\frac{2}{2^6}\right)=\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{3\cdot 2^6-2}{2^8}=\frac{1}{1024}\cdot\frac{190}{256}<\frac{1}{1000}\cdot 1$$

$$1-P(5)=\frac{1}{2^{10}}\left(3-\frac{2}{2^5}\right)=\frac{1}{2^9}\cdot\frac{3\cdot 2^5-2}{2^6}=\frac{1}{512}\cdot\frac{94}{64}>\frac{1}{1000}\cdot 1$$

$1-P(n)$ を n について微分すると、

$$\left\{1-P(n)\right\}'=3\cdot 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\log\frac{1}{2}-2\cdot 3\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\log\frac{1}{2}=6\log 2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}<0$$

$1-P(n)$ は n について単調減少であるから、求める n は　$\therefore n=6$　……(答)