1994 年東大理 $\boxed{1}$

(1)

$$f(x)=x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{24} \qquad f'(x)=4x^3+3x^2+x+\frac{1}{6} \qquad f''(x)=12x^2+6x+1=12\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}>0$$

$f'(x)$ は単調増加であり、 $f'(x)=0$ はただひとつの実数解を持つ。

その実数解を p とすると、 $f(x)$ の増減は右の通り。

x	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

ここで

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{24}\right)+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}$$

$$=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{4}\right)f'(x)+\frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{64}$$

$$\therefore f(x)\geqq f(p)=\frac{1}{16}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{64}>0$$

したがって、任意の実数 x に対し、 $f(x)>0$ が示された。(証明終)

(2)

$$g(x)=x^5+x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x+\frac{1}{120} \qquad g'(x)=5x^4+4x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}$$

$$g''(x)=20x^3+12x^2+3x+\frac{1}{3} \qquad g'''(x)=60x^2+24x+3=60\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{3}{5}>0$$

$g''(x)$ は単調増加であり、 $g''(x)=0$ はただ 1 つの実数解を持つ。

その実数解を q とすると、 $g'(x)$ の増減は右の通り。

x	$\cdots$	q	$\cdots$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	↘		↗

ここで

$$g'(x)=(5x+1)\left(x^3+\frac{3}{5}x^2+\frac{3}{20}x+\frac{1}{60}\right)+\frac{3}{20}x^2+\frac{1}{10}x+\frac{1}{40}$$

$$=\frac{1}{20}(5x+1)g''(x)+\frac{3}{20}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{120}$$

$$\therefore g'(x)\geqq g'(q)=\frac{3}{20}\left(q+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{120}>0$$

任意の実数 x に対し、$g'(x)>0$ であるから、$g(x)$ は単調増加であり、$g(x)=0$ はただひとつの実数解 α を持つ。

$$g(0)=\frac{1}{120}>0 \qquad g(-1)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\frac{1}{120}=-\frac{11}{30}<0 \qquad \therefore -1<\alpha<0$$

以上により、 $g(x)=0$ はただひとつの実数解 α を持ち、 $-1<\alpha<0$ が示された。(証明終)

※下手に工夫しようとした人ほど、はまったと思われる。