1994 年東大理 $\boxed{2}$

(1)

$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ とおくと　$5\theta=\pi$　$3\theta=\pi-2\theta$　$\therefore \cos 3\theta=\cos(\pi-2\theta)=-\cos 2\theta$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$　$\cos 3\theta=\cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta=\cos\theta(2\cos^2\theta-1)-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

であるから　$4\cos^3\theta-3\cos\theta=-2\cos^2\theta+1$　$4\cos^3\theta+2\cos^2\theta-3\cos\theta-1=0$

$(\cos\theta+1)(4\cos^2\theta-2\cos\theta-1)=0$　$\cos\theta\neq-1$ より　$\therefore 4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

$4t^2-2t-1=0$ を解くと　$t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$　$0<\cos\theta<1$ より　$\therefore \cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$$\therefore a=\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}=1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

$$\therefore b=4\sin^2\theta\cos^2\theta=4\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{8}=\frac{15+5\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5}{16}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

これより　$\therefore a+b=\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}+\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}=\dfrac{5}{4},\ ab=\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}\cdot\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}=\dfrac{25-5}{64}=\dfrac{5}{16}$　いずれも有理数である。(証明終)

(2)

$X_n=(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$ とおくと　$X_n=\dfrac{a^n+b^n}{a^nb^n}\cdot(a+b)^n=\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^n(a^n+b^n)=4^n(a^n+b^n)$ であり、

$X_1=4(a+b)=5$　$X_2=16(a^2+b^2)=16\{(a+b)^2-2ab\}=16\left(\dfrac{25}{16}-\dfrac{5}{8}\right)=15$　$n=1,\ 2$ のとき、X_n は整数。

ここで、

$$(a+b)X_{n+1}=\frac{5}{4}X_{n+1}=4^{n+1}(a^{n+1}+b^{n+1})\cdot(a+b)=4^{n+1}\{(a^{n+2}+b^{n+2})+ab(a^n+b^n)\}$$

$$5X_{n+1}=4^{n+2}\left\{(a^{n+2}+b^{n+2})+\frac{5}{16}(a^n+b^n)\right\}=4^{n+2}(a^{n+2}+b^{n+2})+5\cdot4^n(a^n+b^n)=X_{n+2}+5X_n$$

$$\therefore X_{n+2}=5(X_{n+1}-X_n)$$

したがって、$X_1,\ X_2$ が整数であるから、以下帰納的に、$X_3,\ X_4,\ \cdots,\ X_n$ は整数である。(証明終)