1994年東大理$\boxed{5}$

(1)

4の数字のカードを引く確率をrとすると、$p+4q+r=1$より　$\therefore r=1-p-4q>0$

$a+b \leqq 4$となるのは$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$のときであるから、

$$P(A)=q^2+q^2+q^2+pq+q^2+pq=2pq+4q^4$$

$a<b$となる確率は、対称性より、$a \neq b$となる確率の$\frac{1}{2}$である。

余事象により、$a \neq b$となる確率は、$a=b$となる確率を1から引いたものであるから

$$P(a=b)=q^2+q^2+p^2+(1-p-4q)^2+q^2+q^2=p^2+4q^2+1+p^2+16q^2-2p-8q+8pq$$
$$=2p^2+8pq+20q^2-2p-8q+1$$
$$\therefore P(B)=\frac{1}{2}\{1-P(a=b)\}=\frac{1}{2}(-2p^2-8pq-20q^2+2p+8q)=-p^2-4pq-10q^2+p+4q$$

したがって　$\therefore E=2P(A)+P(B)=4pq+8q^4-p^2-4pq-10q^2+p+4q=-p^2-2q^2+p+4q$　……(答)

(2)

$$E=-p^2-2q^2+p+4q=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-2(q-1)^2+\frac{9}{4}$$

$4q<1$より　$q<\frac{1}{4}$　$\frac{1}{q}>4$　$\frac{1}{q}=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \cdots$であるから　$\therefore q=\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \cdots$

同様に、$p<1$より　$\frac{1}{p}>1$　$\frac{1}{p}=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$であるから　$\therefore p=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots$

以下、pを固定して考えると、$q<1$であるから、qが大きいほどEは大きくなる。

$p=\frac{1}{2}$のとき　$4q<\frac{1}{2}$であるから　$q<\frac{1}{8}$　$\therefore q \leqq \frac{1}{9}$　$\therefore E \leqq -2\cdot\frac{64}{81}+\frac{9}{4}=\frac{217}{324}=0.66\cdots$

$p=\frac{1}{3}$のとき　$4q<\frac{2}{3}$であるから　$q<\frac{1}{6}$　$\therefore q \leqq \frac{1}{7}$　$\therefore E \leqq -\frac{1}{36}-2\cdot\frac{36}{49}+\frac{9}{4}=\frac{332}{441}=0.75\cdots$

$p=\frac{1}{4}$のとき　$4q<\frac{3}{4}$であるから　$q<\frac{3}{16}$　$\therefore q \leqq \frac{1}{6}$　$\therefore E \leqq -\frac{1}{16}-2\cdot\frac{25}{36}+\frac{9}{4}=\frac{115}{144}=0.79\cdots$

$p=\frac{1}{5}$のとき　$4q<\frac{4}{5}$であるから　$q<\frac{1}{5}$　$\therefore q \leqq \frac{1}{6}$　$\therefore E \leqq -\frac{9}{100}-2\cdot\frac{25}{36}+\frac{9}{4}<\frac{115}{144}$

$p \leqq \frac{1}{6}$のとき　qは最大値$\frac{1}{5}$をとれるから　$\therefore E \leqq -\frac{1}{9}-2\cdot\frac{16}{25}+\frac{9}{4}=\frac{773}{900}=0.85\cdots$

以上により、Eを最大にする$p,\ q$は　$\therefore p=\frac{1}{6},\ q=\frac{1}{5}$　……(答)