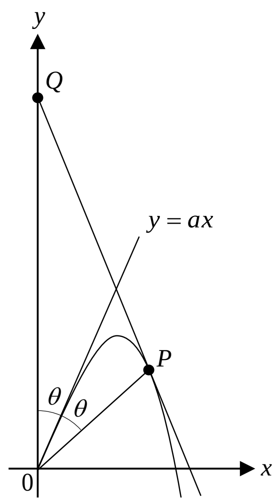
1995年東大文$\boxed{3}$



$y=-x^3+ax$ の点 $(t,\ -t^3+at)$ における接線の式は、 $y'=-3x^2+a$ より

$$y=(-3t^2+a)(x-t)-t^3+at=(-3t^2+a)x+2t^3$$

原点 O における接線 l は、 $y=ax$ である。

l が y 軸となす角を θ とすると $\tan\theta=\dfrac{1}{a}$ で、

OP が y 軸となす角は 2θ であるから、 $a\neq1$ のとき

$$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\frac{2}{a}}{1-\frac{1}{a^2}}=\frac{2a}{a^2-1}$$

OP の式は $y=\dfrac{a^2-1}{2a}x$ である。 $a=1$ のとき、 l は $y=x$ 、 OP は $y=0$ であるから、 $a=1$ でも成立。

$y=\dfrac{a^2-1}{2a}x$ と $y=-x^3+ax$ の原点以外の交点を求めると

$$\frac{a^2-1}{2a}x=-x^3+ax \qquad x^3+\left(\frac{a^2-1}{2a}-\frac{2a^2}{2a}\right)x=x^3-\frac{a^2+1}{2a}x=x\left(x^2-\frac{a^2+1}{2a}\right)=0$$

$x>0$ より　$\therefore x=\sqrt{\dfrac{a^2+1}{2a}}$　これより、 Q の座標は $\left(0,\ 2\left(\dfrac{a^2+1}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$

$$\therefore S(a)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2+1}{2a}}\cdot2\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$$

$S(a)$ は $a+\dfrac{1}{a}$ が最小のとき最小になる。

相加平均・相乗平均の関係より　$a+\dfrac{1}{a}\geqq2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$　等号成立は　$a=\dfrac{1}{a}$　$a^2=1$　$\therefore a=1$

以上により、 $S(a)$ は $a=1$ のとき最小値1をとる。……(答)