1995年東大理後期 $\boxed{1}$　※2014. 8. 27 修正しました。

(1)

パスカルの三角形の規則性により、${}_nC_m+{}_nC_{m+1}={}_{n+1}C_{m+1}$ が成り立つ。

$$Q_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}C_{3k+1}=\sum_{k=0}^{n+1}({}_nC_{3k}+{}_nC_{3k+1})=\sum_{k=0}^{n+1}{}_nC_{3k}+\sum_{k=0}^{n+1}{}_nC_{3k+1}$$

$k>n$ のとき ${}_nC_k=0$ より　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}{}_nC_{3k}=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_{3k}=P_n,\ \sum_{k=0}^{n+1}{}_nC_{3k+1}=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_{3k+1}=Q_n$

$$\therefore Q_{n+1}=P_n+Q_n$$

同様に

$$R_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}C_{3k+2}=\sum_{k=0}^{n+1}({}_nC_{3k+1}+{}_nC_{3k+2})=\sum_{k=0}^{n+1}{}_nC_{3k+1}+\sum_{k=0}^{n+1}{}_nC_{3k+2}=Q_n+R_n$$

また、$k\geqq1$ において ${}_nC_{3k-1}+{}_nC_{3k}={}_{n+1}C_{3k}$ より

$$P_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}C_{3k}={}_{n+1}C_0+\sum_{k=1}^{n+1}({}_nC_{3k-1}+{}_nC_{3k})=\sum_{k=1}^{n+1}{}_nC_{3(k-1)+2}+\left({}_{n+1}C_0+\sum_{k=1}^{n+1}{}_nC_{3k}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_{3k+2}+\sum_{k=0}^{n+1}{}_nC_{3k}=R_n+P_n$$

以上により

$$\therefore\begin{cases}P_{n+1}=R_n+P_n\\Q_{n+1}=P_n+Q_n\\R_{n+1}=Q_n+R_n\end{cases}\quad\cdots\cdots(答)$$

(2)

$P_1=1,\ Q_1=1,\ R_1=0$ である。(1) より

$$P_{n+1}+Q_{n+1}+R_{n+1}=2(P_n+Q_n+R_n)\qquad\therefore P_n+Q_n+R_n=(P_1+Q_1+R_1)\cdot2^{n-1}=2^n\ \text{―――①}$$

(1) と①より

$$\therefore\begin{cases}P_{n+1}=2^n-Q_n\ \text{―――②}\\Q_{n+1}=2^n-R_n\ \text{―――③}\\R_{n+1}=2^n-P_n\ \text{―――④}\end{cases}$$

②～④より　$P_{n+3}=2^{n+2}-Q_{n+2}=2^{n+2}-(2^{n+1}-R_{n+1})=2^{n+1}+(2^n-P_n)=3\cdot2^n-P_n$

同様に、$Q_{n+3}=3\cdot2^n-Q_n,\ R_{n+3}=3\cdot2^n-R_n$ が導かれる。

以下、$m\geqq1$ とする。

$n=3m-2$ のとき

$$P_{3m+1}=3\cdot2^{3m-2}-P_{3m-2}=6\cdot8^{m-1}-P_{3m-2}\quad\frac{P_{3m+1}}{8^{m-1}}=-\frac{P_{3m-2}}{8^{m-1}}+6\quad\frac{P_{3m+1}}{8^m}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{P_{3m-2}}{8^{m-1}}+\frac{3}{4}$$

$a_m=\dfrac{P_{3m-2}}{8^{m-1}}$ とすると　$a_{m+1}=-\dfrac{1}{8}a_m+\dfrac{3}{4}$　$a_{m+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{8}\left(a_m-\dfrac{2}{3}\right)$

$a_1=\dfrac{P_1}{8^0}=P_1=1$ より　$a_m-\dfrac{2}{3}=\left(a_1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{m-1}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{m-1}$　$a_m=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{m-1}$

$(-1)^3=-1$ より　$\therefore P_{3m-2}=\dfrac{2\cdot 8^{m-1}+(-1)^{m-1}}{3}=\dfrac{2^{3m-2}+(-1)^{3m-3}}{3}=\dfrac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$

同様に、$b_m=\dfrac{Q_{3m-2}}{8^{m-1}}$ とおくと、$b_1=a_1=1$ より $Q_{3m-2}=P_{3m-2}=\dfrac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$ を得る。

同様に、$c_m=\dfrac{R_{3m-2}}{8^{m-1}}$ とおくと、$c_1=\dfrac{R_1}{8^0}=R_1=0$ より　$c_m-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{m-1}$　$c_m=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{m-1}$

$$\therefore R_{3m-2}=\frac{2\cdot 8^{m-1}-2\cdot(-1)^{m-1}}{3}=\frac{2^{3m-2}-2\cdot(-1)^{3m-3}}{3}=\frac{2^{3m-2}+2\cdot(-1)^{3m-2}}{3}=\frac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$$

$n=3m-1$ のとき　(1) より

$$P_{3m-1}=R_{3m-2}+P_{3m-2}$$
$$=\frac{2^{3m-2}+2\cdot(-1)^{3m-2}}{3}+\frac{2^{3m-2}+(-1)^{3m-3}}{3}=\frac{2^{3m-1}-(-1)^{3m-3}}{3}=\frac{2^{3m-1}+(-1)^{3m-2}}{3}=\frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$$

$$Q_{3m-1}=P_{3m-2}+Q_{3m-2}=2\times\frac{2^{3m-2}+(-1)^{3m-3}}{3}=\frac{2^{3m-1}+2\cdot(-1)^{3m-3}}{3}=\frac{2^{3m-1}+2\cdot(-1)^{3m-1}}{3}=\frac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$$

$$R_{3m-1}=Q_{3m-2}+R_{3m-2}=P_{3m-2}+R_{3m-2}=P_{3m-1}=\frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$$

$n=3m$ のとき　(1) より

$$P_{3m}=R_{3m-1}+P_{3m-1}=2\times\frac{2^{3m-1}+(-1)^{3m-2}}{3}=\frac{2^{3m}+2\cdot(-1)^{3m-2}}{3}=\frac{2^{3m}+2\cdot(-1)^{3m}}{3}=\frac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$$

$$Q_{3m}=P_{3m-1}+Q_{3m-1}$$
$$=\frac{2^{3m-1}+(-1)^{3m-2}}{3}+\frac{2^{3m-1}+2\cdot(-1)^{3m-1}}{3}=\frac{2^{3m}-(-1)^{3m-2}}{3}=\frac{2^{3m}+(-1)^{3m-1}}{3}=\frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$$

$$R_{3m}=Q_{3m-1}+R_{3m-1}=Q_{3m-1}+P_{3m-1}=Q_{3m}=\frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$$

以上より、$m\geqq 1$ として

$n=3m-2$ のとき　$R_n=\dfrac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$，　$P_n=Q_n=\dfrac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$

$n=3m-1$ のとき　$Q_n=\dfrac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$，　$R_n=P_n=\dfrac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$　……(答)

$n=3m$ のとき　$P_n=\dfrac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$，　$Q_n=R_n=\dfrac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}$

(3)

(2) より　$Q_{12}=R_{12}=\dfrac{2^{12}-1}{3}=\dfrac{4095}{3}=1365$　$P_{12}=\dfrac{2^{12}+2}{3}=\dfrac{4098}{3}=1366$

$\therefore P_{12}=1366,\ Q_{12}=R_{12}=1365$　……(答)