1995 年東大理後期$\boxed{3}$

(1)
Aの手持ちのカードの数字を$A_1, A_2\ (A_1 < A_2)$とし、Bの手持ちのカードの数字を$B_1, B_2\ (B_1 < B_2)$とする。
A_1, A_2, B_1, B_2の大小関係で場合分けをする。

① $A_1 < A_2 < B_1 < B_2$
どのようにカードを出しても、Aは合計 0 点である。
② $A_1 < B_1 < A_2 < B_2$
AがA_1を先に出せば、BはB_2を残してB_1を出せばよく、1 点を得る。残りのカードの比較でもBが 1 点を得る。AがA_2を先に出せば、BはB_2を出して 1 点を得る。残りのカードの比較でもBが 1 点を得る。いずれにしてもAは合計 0 点である。
③ $A_1 < B_1 < B_2 < A_2$
AがA_1を先に出せば、BはB_2を残してB_1を出し、1 点を得る。残りのカードの比較でAも 1 点を得る。
AがA_2を先に出せば、BはB_2を残してB_1を出し、1 点を得る。残りのカードの比較でBも 1 点を得る。
いずれにしてもAは合計 1 点である。
④ $B_1 < A_1 < A_2 < B_2$
AがA_1, A_2のいずれを先に出しても、BはB_2を出して 1 点を得て、残りのカードの比較でAも 1 点を得るから、Aは合計 1 点である。
⑤ $B_1 < A_1 < B_2 < A_2$
AがA_1を先に出せば、BはB_2を出して 1 点を得る。残りのカードの比較でAも 1 点を得る。
AがA_2を先に出せば、BはB_2を残してB_1を出し、Aが 1 点を得る。残りのカードの比較でBも 1 点を得る。
いずれにしても、Aは合計 1 点である。
⑥ $B_1 < B_2 < A_1 < A_2$
どのようにカードを出しても、Aは合計 2 点である。

以上により、Aが手持ちのカードのどちらを先に出しても同じである。……(答)

(2)
A, Bに無作為に 2 枚ずつカードを配ったとき、A_1, A_2, B_1, B_2の大小関係は(1)の①～⑥のいずれかになり、どの場合も同様に確からしいから、Aが得る点数の期待値は

$$\therefore \frac{0+0+1+1+1+2}{6} = \frac{5}{6} \quad \cdots\cdots (答)$$

(3)
それぞれの場合について期待値を求める。Aが点数を得る場合のみ考えればよい。
Bのカードの選び方は${}_{11}C_2 = 55$通り。
i) $A_1 = 1, A_2 = 13$のとき
Bがいずれの 2 枚のカードを選んでも、A_1, A_2, B_1, B_2の大小関係は③ $A_1 < B_1 < B_2 < A_2$しかあり得ないので、Aが得る点数の期待値は $\therefore 1$

ⅱ）　$A_1=2, A_2=12$ のとき、A_1, A_2, B_1, B_2 の大小関係が

③ $A_1<B_1<B_2<A_2$ になる確率は、B が 3〜11 から 2 枚を選んだときで、$\frac{{}_9C_2}{55}=\frac{36}{55}$　得点は 1。

④ $B_1<A_1<A_2<B_2$ になる確率は、B が 1 と 13 を選んだときのみで、$\frac{1}{55}$　得点は 1。

⑤ $B_1<A_1<B_2<A_2$ になる確率は、B が 1 と 3〜11 を選んだときで、$\frac{1\times 9}{55}=\frac{9}{55}$　得点は 1。

⑥ $B_1<B_2<A_1<A_2$ になることはあり得ない。A が得る点数の期待値は　$\therefore \frac{1\times 36+1\times 1+1\times 9}{55}=\frac{46}{55}$

ⅲ）　$A_1=3, A_2=11$ のとき、A_1, A_2, B_1, B_2 の大小関係が

③ $A_1<B_1<B_2<A_2$ になる確率は、B が 4〜10 から 2 枚を選んだときで、$\frac{{}_7C_2}{55}=\frac{21}{55}$　得点は 1。

④ $B_1<A_1<A_2<B_2$ になる確率は、B が 1〜2 と 12〜13 を選んだときで、$\frac{2\times 2}{55}=\frac{4}{55}$　得点は 1。

⑤ $B_1<A_1<B_2<A_2$ になる確率は、B が 1〜2 と 4〜10 を選んだときで、$\frac{2\times 7}{55}=\frac{14}{55}$　得点は 1。

⑥ $B_1<B_2<A_1<A_2$ になる確率は、B が 1 と 2 を選んだときのみで、$\frac{1}{55}$　得点は 2。

A が得る点数の期待値は　$\therefore \frac{1\times 21+1\times 4+1\times 14+2\times 1}{55}=\frac{41}{55}$

ⅳ）　$A_1=4, A_2=10$ のとき、A_1, A_2, B_1, B_2 の大小関係が

③ $A_1<B_1<B_2<A_2$ になる確率は、B が 5〜9 から 2 枚を選んだときで、$\frac{{}_5C_2}{55}=\frac{10}{55}=\frac{2}{11}$　得点は 1。

④ $B_1<A_1<A_2<B_2$ になる確率は、B が 1〜3 と 11〜13 を選んだときで、$\frac{3\times 3}{55}=\frac{9}{55}$　得点は 1。

⑤ $B_1<A_1<B_2<A_2$ になる確率は、B が 1〜3 と 5〜9 を選んだときで、$\frac{3\times 5}{55}=\frac{15}{55}=\frac{3}{11}$　得点は 1。

⑥ $B_1<B_2<A_1<A_2$ になる確率は、B が 1〜3 から 2 枚を選んだときで、$\frac{{}_3C_2}{55}=\frac{3}{55}$　得点は 2。

A が得る点数の期待値は　$\therefore \frac{1\times 10+1\times 9+1\times 15+2\times 3}{55}=\frac{40}{55}=\frac{8}{11}$

ⅴ）　$A_1=5, A_2=9$ のとき、A_1, A_2, B_1, B_2 の大小関係が

③ $A_1<B_1<B_2<A_2$ になる確率は、B が 6〜8 から 2 枚を選んだときで、$\frac{{}_3C_2}{55}=\frac{3}{55}$　得点は 1。

④ $B_1<A_1<A_2<B_2$ になる確率は、B が 1〜4 と 10〜13 を選んだときで、$\frac{4\times 4}{55}=\frac{16}{55}$　得点は 1。

⑤ $B_1 < A_1 < B_2 < A_2$ になる確率は、B が 1～4 と 6～8 を選んだときで、$\dfrac{4\times 3}{55} = \dfrac{12}{55}$　得点は 1。

⑥ $B_1 < B_2 < A_1 < A_2$ になる確率は、B が 1～4 から 2 枚を選んだときで、$\dfrac{{}_4C_2}{55} = \dfrac{6}{55}$　得点は 2。

A が得る点数の期待値は　$\therefore \dfrac{1\times 3 + 1\times 16 + 1\times 12 + 2\times 6}{55} = \dfrac{43}{55}$

vi）　$A_1 = 6, A_2 = 8$ のとき、A_1, A_2, B_1, B_2 の大小関係が

③ $A_1 < B_1 < B_2 < A_2$ になることはあり得ない。

④ $B_1 < A_1 < A_2 < B_2$ になる確率は、B が 1～5 と 9～13 を選んだときで、$\dfrac{5\times 5}{55} = \dfrac{25}{55} = \dfrac{5}{11}$　得点は 1。

⑤ $B_1 < A_1 < B_2 < A_2$ になる確率は、B が 1～5 と 7 を選んだときで、$\dfrac{5\times 1}{55} = \dfrac{5}{55} = \dfrac{1}{11}$　得点は 1。

⑥ $B_1 < B_2 < A_1 < A_2$ になる確率は、B が 1～5 から 2 枚を選んだときで、$\dfrac{{}_5C_2}{55} = \dfrac{10}{55} = \dfrac{2}{11}$　得点は 2。

A が得る点数の期待値は　$\therefore \dfrac{1\times 5 + 1\times 1 + 2\times 2}{11} = \dfrac{10}{11} = \dfrac{50}{55}$

以上により、A が得る点数の期待値は、

1 と 13 を選んだとき最大になり、期待値は1。4 と 10 を選んだとき最小になり、期待値は $\dfrac{8}{11}$。……(答)