1995 年東大理 $\boxed{2}$

$f(x)=1-\sin x \qquad g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$

$$g(x)=\int_0^x (x-t)(1-\sin t)dt = x\int_0^x (1-\sin t)dt-\int_0^x (t-t\sin t)dt = x\left[t+\cos t\right]_0^x-\left[\frac{t^2}{2}+t\cos t-\sin t\right]_0^x$$

$$=x(x+\cos x-1)-\left(\frac{x^2}{2}+x\cos x-\sin x\right)=x^2+x\cos x-x-\frac{x^2}{2}-x\cos x+\sin x=\frac{x^2}{2}-x+\sin x$$

$$g(x+y)+g(x-y)=\frac{(x+y)^2}{2}-(x+y)+\sin(x+y)+\frac{(x-y)^2}{2}-(x-y)+\sin(x-y)=x^2+y^2-2x+2\sin x\cos y$$

$$\therefore g(x+y)+g(x-y)-2g(x)=x^2+y^2-2x+2\sin x\cos y-(x^2-2x+2\sin x)=y^2+2\sin x(\cos y-1)$$

任意の実数 $x,\ y$ について、 $y^2+2\sin x(\cos y-1)\geqq 0$ が成り立つことを示せばよい。

$-1\leqq \sin x\leqq 1,\ \cos y-1\leqq 0$ であるから $\quad y^2+2\sin x(\cos y-1)\geqq y^2+2(\cos y-1)$

$h(y)=y^2+2\cos y-2$ とすると $\quad h'(y)=2y-2\sin y \quad h''(y)=2(1-\cos y)\geqq 0$

$h'(y)$ は単調増加であり、 $\lim_{y\to+\infty}h'(y)=+\infty,\ \lim_{y\to-\infty}h'(y)=-\infty$ は明らかであるから、

$h'(y)$ は $h'(y)=0$ となる実数 y をただ 1 つ持つ。

$h'(0)=0$ であるから、$h(y)$ は $y=0$ で極小となる。 $h(0)=0$ より $\quad \therefore h(y)\geqq 0$

y	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(y)$	$-$	0	$+$
$h''(y)$	$+$	$+$	$+$
$h(y)$	$\searrow$		$\nearrow$

したがって、任意の実数 y について $h(y)\geqq 0$ であることが示されたので、

任意の実数 $x,\ y$ について $y^2+2\sin x(\cos y-1)\geqq 0$ であることも示された。

$\therefore g(x+y)+g(x-y)\geqq 2g(x)$ （証明終）

等号成立は $y=0$ のときで、 x は任意。