1995 年東大理 $\boxed{4}$

$$f(n)=n+\frac{N}{n} \quad f'(n)=1-\frac{N}{n^2}=\frac{(n+\sqrt{N})(n-\sqrt{N})}{n^2}$$

$n \leqq \sqrt{N}$ のとき $f'(n) \leqq 0$ で、単調減少。 $n \geqq \sqrt{N}$ のとき $f'(n) \geqq 0$ で、単調増加。

N が平方数であるとき、 $f(n)$ は $n=\sqrt{N}$ で最小値 $2\sqrt{N}$ をとる。

N が平方数ではないとき、 $f(n)$ は n が $\sqrt{N}$ を超えない最大の約数であるか、 $\sqrt{N}$ を超える最小の約数であるとき、最小値をとる。

(1)

$n=2^m$ $(0 \leqq m \leqq k)$ と書ける。

k が偶数のとき、 $f(n)$ は $n=2^{\frac{k}{2}}$ のとき最小値 $2\cdot 2^{\frac{k}{2}}=2^{\frac{k+2}{2}}$ をとる。

k が奇数のとき、$2^{\frac{k-1}{2}}<2^{\frac{k}{2}}<2^{\frac{k+1}{2}}$ であり、 $f(2^{\frac{k-1}{2}})=f(2^{\frac{k+1}{2}})=2^{\frac{k-1}{2}}+2^{\frac{k+1}{2}}=3\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$ であるから、

$f(n)$ は $n=2^{\frac{k-1}{2}},\ 2^{\frac{k+1}{2}}$ のとき最小値 $3\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$ をとる。

$$\therefore \begin{cases} k\text{が偶数のとき} \qquad 2^{\frac{k+2}{2}} \ (n=2^{\frac{k}{2}}) \\ k\text{が奇数のとき} \qquad 3\cdot 2^{\frac{k-1}{2}} \ (n=2^{\frac{k-1}{2}},\ 2^{\frac{k+1}{2}}) \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2)

$N=7!=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$

このとき $\sqrt{N}=2^2\cdot 3\cdot \sqrt{35}<2^2\cdot 3\cdot 6=2^3\cdot 3^2$ であり、 $2^3\cdot 3^2=72$ は N の約数である。

71は素数であり、 N の約数ではない。 $70=2\cdot 5\cdot 7<2\cdot 6\cdot \sqrt{35}=\sqrt{N}$ であり、 70 は N の約数である。

したがって、 $f(n)$ は $n=70$ か $n=72$ で最小となる。

$f(70)=f(72)=2\cdot 5\cdot 7+2^3\cdot 3^2=70+72=142$　最小値は　$\therefore 142\ (n=70,\ 72)$ ……(答)