1995 年東大理 $\boxed{5}$

(1)

P_{k-1} が x 軸上にあり、k 回目に 2 の目が出たとすると、P_k の y 座標 y_k は $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ となる。

以降、$k+1$ 回目から n 回目まで 4 の目が出続けたとすると、P_n の y 座標 y_n は

$$y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^k-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^k-\left(\frac{1}{2}\right)^k\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

これより、n をどれだけ大きくしても $y_n=0$ にはならず、P_n が x 軸上に達することはない。すなわち、1 回でも x 軸上から北方向に移動すると、再び x 軸上に戻ることはない。南方向に移動した場合も同様である。
したがって、P_n が x 軸上にあれば、$P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ もすべて x 軸上になければならない。(証明終)

(2)
(解答 1)

P_n が x 軸上にある確率 X_n は、2 と 4 以外の目が出続けるから　$X_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

同様に、P_n が y 軸上にある確率 Y_n は、1 と 3 以外の目が出続けるから　$Y_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

P_n が P_0 に一致する確率は、5 か 6 の目が出続けるから　$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

P_n がいずれかの軸上にある確率は　$\therefore X_n+Y_n-\left(\frac{1}{3}\right)^n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

P_n がいずれの軸上にもない確率は、余事象より　$1-2\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$

対称性より、P_n が第 1 象限にある確率はこの $\frac{1}{4}$ であるから　$\therefore \frac{1}{4}\left\{1-2\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ ……(答)

(解答 2)　対称性の利用に気づかなかった場合

n 回サイコロを投げた後、P_n が x 軸上の正側にある確率 X_n を考える。(1)の議論により、P_n が $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ のいずれかと一致するのは、5 か 6 の目が出て移動しなかった場合に限られる。最初に P_0 から移動するとき、東方向に移動すれば、以降は x 軸上を移動する限り P_0 に戻ることはない。

したがって、P_{n+1} が x 軸上の正側にある条件は
 i) P_n が x 軸上の正側にあり、$n+1$ 回目に 2 と 4 以外の目が出る。
ii) P_n が P_0 に一致し、$n+1$ 回目に 1 の目が出る
のいずれかであるから、

$$X_{n+1}=\frac{2}{3}X_n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{6}\quad 3^{n+1}X_{n+1}=2\cdot 3^nX_n+\frac{1}{2}\quad 3^{n+1}X_{n+1}+\frac{1}{2}=2\left(3^nX_n+\frac{1}{2}\right)$$

$X_1=\dfrac{1}{6}$ であるから　$3^nX_n+\dfrac{1}{2}=\left(3\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$　$3^nX_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$　$\therefore X_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

対称性より、P_n が y 軸上の正側にある確率 Y_n も同じである。$\therefore Y_n=X_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

P_n が第 1 象限にあるとき、$n+1$ 回目にいずれの目が出ても、P_{n+1} は必ず第 1 象限にある。

P_{n+1} が第 1 象限にある条件は

ｉ）P_n が x 軸上の正側にあり、$n+1$ 回目に 2 の目が出る。

ｉｉ）P_n が y 軸上の正側にあり、$n+1$ 回目に 1 の目が出る。

ｉｉｉ）P_n が第 1 象限にある。

のいずれかであるから、P_n が第 1 象限にある確率を Q_n とすると

$$Q_{n+1}=\frac{1}{6}X_n+\frac{1}{6}Y_n+Q_n\quad\therefore Q_{n+1}-Q_n=\frac{1}{6}(X_n+Y_n)=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(Q_{k+1}-Q_k)=Q_n-Q_1=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^k-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}$

1 回の移動で P_0 から第 1 象限に達することはないので　$\therefore Q_1=0$。

$$\therefore Q_n=\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}-\frac{1}{12}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{4}\left\{1-2\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\ \cdots\cdots(答)$$

$n=1$ でも成立する。