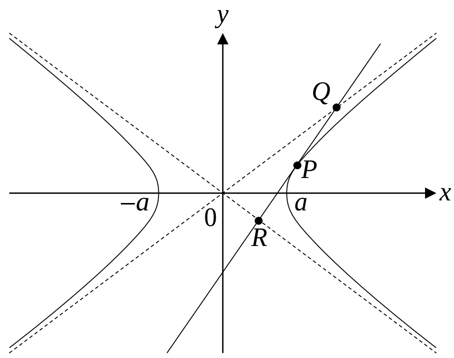
1995年東大理 $\boxed{6}$

(1)

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点を $P(x_0,\ y_0)$ とする。対称性より $x_0>0$ で考える。

x で微分すると　$\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　$y\neq0$ のとき　$\therefore\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{a^2y}$



したがって、$y_0\neq0$ のとき、P における接線 l は

$$y=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)+y_0\qquad\therefore\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$$

$P(a,\ 0)$ のとき、接線は $x=a$ であるから、$y_0=0$ でも成立。

l と漸近線 $y=\dfrac{b}{a}x$ との交点を $Q(x_1,\ y_1)$ とすると

$$\frac{x_0x_1}{a^2}-\frac{y_0}{b^2}\cdot\frac{b}{a}x_1=\left(\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{ab}\right)x_1=1\qquad\therefore x_1=\frac{a}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}}\qquad\therefore y_1=\frac{b}{a}x_1=\frac{b}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}}$$

l と漸近線 $y=-\dfrac{b}{a}x$ との交点を $R(x_2,\ y_2)$ とすると

$$\frac{x_0x_2}{a^2}+\frac{y_0}{b^2}\cdot\frac{b}{a}x_2=\left(\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0}{ab}\right)x_2=1\qquad\therefore x_2=\frac{a}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}}\qquad\therefore y_2=-\frac{b}{a}x_1=-\frac{b}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}}$$

なお、$y_0\neq\dfrac{b}{a}x_0$ より $\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\neq0$、$y_0\neq-\dfrac{b}{a}x_0$ より $\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\neq0$ である。

l と x と軸との交点は $\left(\dfrac{a^2}{x_0},\ 0\right)$ であるから、三角形 OQR の面積は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{x_0}\cdot(y_1-y_2)$

$$y_1-y_2=\frac{b}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}}+\frac{b}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}}=b\frac{\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)+\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)}{\dfrac{{x_0}^2}{a^2}-\dfrac{{y_0}^2}{b^2}}=\frac{2bx_0}{a}\qquad\therefore S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{2bx_0}{a}=ab$$

したがって、S は点 P の取り方によらず、$a,\ b$ によって定まる。（証明終）

(2)

$u=e^t$ とおくと $u>0$ で、$S(u)=ab=(5u^2+u^{-1})(u^2+u^{-1})=5u^4+6u+\dfrac{1}{u^2}$ と表せる。

$$S'(u)=20u^3+6-\frac{2}{u^3}=\frac{20u^6+6u^3-2}{u^3}=\frac{2(5u^3-1)(2u^3+1)}{u^3}$$

増減は右の通りで、$S(u)$ は $u^3=\dfrac{1}{5}$、$u=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ のとき最小。

u	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$	$\cdots$
$S'(u)$		$-$	0	$+$
$S(u)$		↘		↗

求める最小値は　$S\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)=\dfrac{5}{5\sqrt[3]{5}}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{5}}+\sqrt[3]{5^2}=\dfrac{7+5}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{12}{\sqrt[3]{5}}$　……（答）