1996 年東大文 $\boxed{4}$

$\overrightarrow{PQ}=(a-1,\ a+1,\ -1)$ であるから、直線 PQ 上の点は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a-1\\a+1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(a-1)t\\(a+1)t\\1-t\end{pmatrix}$ ――①

$z=1-t$ とすると　$t=1-z$　①に代入すると $\begin{pmatrix}1+(a-1)(1-z)\\(a+1)(1-z)\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-(a-1)z\\(a+1)(1-z)\\z\end{pmatrix}$

直線 PQ と、平面 $z=k$ $(0\leqq k\leqq 1)$ との交点は、$(a-(a-1)k,\ (a+1)(1-k),\ k)$ であるから
この交点と z 軸との距離は

$$\begin{aligned}\sqrt{\{a-(a-1)k\}^2+(a+1)^2(1-k)^2}&=\sqrt{a^2-2(a^2-a)k+(a-1)^2k^2+(a+1)^2-2(a+1)^2k+(a+1)^2k^2}\\&=\sqrt{2a^2+2a+1-2(2a^2+a+1)k+2(a^2+1)k^2}\end{aligned}$$

この立体の、平面 $z=k$ による断面は、半径 $\sqrt{2a^2+2a+1-2(2a^2+a+1)k+2(a^2+1)k^2}$ の円であるから

$$\begin{aligned}\therefore V(a)&=\pi\int_0^1\left\{2a^2+2a+1-2(2a^2+a+1)k+2(a^2+1)k^2\right\}dk\\&=\pi\left[(2a^2+2a+1)k-(2a^2+a+1)k^2+2(a^2+1)\frac{k^3}{3}\right]_0^1\\&=\pi\left(2a^2+2a+1-2a^2-a-1+\frac{2a^2+2}{3}\right)=\pi\left(\frac{2}{3}a^2+a+\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

$V(a)=\dfrac{2}{3}\pi\left(a^2+\dfrac{3}{2}a+1\right)=\dfrac{2}{3}\pi\left\{\left(a+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{16}\right\}$ より、$a=-\dfrac{3}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{7}{24}\pi$ をとる。……(答)