1996 年東大理後期 $\boxed{1}$

(1)

1から n までの異なる番号のついた n 個のボールに、3 つの箱 A, B, C のいずれかを割り当てると考えれば

$\therefore 3^n$ 通り ……(答)

(2)

区別のつかない n 個のボールを横一列に並べ、両端を含むボールとボールの間 $n+1$ 箇所のうち、いずれか 2 箇所に仕切りを置く。こうしてできた 3 つのグループに、左から箱 A, B, C を割り当てるとする。2 つの仕切りは同じ箇所に置いてもよい。例えば、左端に仕切りを置いた場合、箱 A は 0 個、同じ箇所に 2 つの仕切りが置かれた場合、箱 B は 0 個と考える。ボールの入れ方の総数は、仕切りの置き方の総数に等しいので

$\therefore {}_{n+1}C_2+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ 通り ……(答)

(3)

(1)において、

i) すべてのボールが 1 つの箱に入る場合は 3 通りで、箱の区別がなくなれば 1 通り。

ii) i)以外の場合は 3^n-3 通りで、箱の区別がなくなれば $\dfrac{3^n-3}{3!}=\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$ 通り。

以上により、$\therefore \dfrac{3^{n-1}-1}{2}+1=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$ 通り ……(答)

(4)

すべてのボールが 1 つの箱に入る場合は 1 通り。

区別のつかない $6m$ 個のボールを 2 つのグループに分けると、$(1,\ 6m-1),\ (2,\ 6m-2),\ \cdots,\ (3m,\ 3m)$ のいずれか。

したがって、空き箱が 1 つできる入れ方は $3m=\dfrac{n}{2}$ 通り。

区別のつかない $6m$ 個のボールを 3 つのグループに分けるとする。

i) 3 つのグループが同じ数になるのは、$(2m,\ 2m,\ 2m)$ の 1 通り。

ii) 3 つのグループのうち 2 つが同じ数になるのは、$(1,\ 1,\ 6m-2),\ (2,\ 2,\ 6m-4),\ \cdots,\ (3m-1,\ 3m-1,\ 2)$ の

$3m-1$ 通りから i)の場合を引いて、$3m-2=\dfrac{n}{2}-2$ 通り。

iii) 3 つのグループが違う数になるとき

区別のつかない $n=6m$ 個のボールを横一列に並べ、両端を含まないボールとボールの間 $n-1$ 箇所のうち、いずれか 2 箇所に仕切りを置く。2 つの仕切りは同じ箇所に置かないとする。

このとき、仕切られた 3 グループとも違う数になる置き方は、

$${}_{n-1}C_2-3\times\left(\frac{n}{2}-2\right)-1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{3(n-4)}{2}-1=\frac{n^2-6n+12}{2} \text{ 通り。}$$

順番違いを考慮し、3 つのグループが違う数になるのは、$\dfrac{n^2-6n+12}{2\cdot 3!}=\dfrac{n^2-6n+12}{12}$ 通り。

以上を合計して　$\therefore 1+\dfrac{n}{2}+1+\left(\dfrac{n}{2}-2\right)+\dfrac{n^2-6n+12}{12}=\dfrac{n^2+6n+12}{12}$ 通り ……(答)