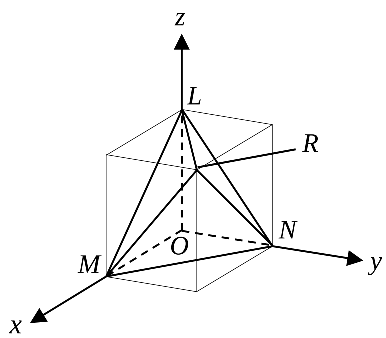
1996 年東大理後期 $\boxed{2}$

（解答 1）　等面四面体の性質を利用する場合



(1)

相似性により、$MN=a,\ NL=b,\ LM=c$ となり、この四面体の 4 つの面はすべて合同である。空間座標系において図のような直方体を考え、$M(s,\ 0,\ 0),\ N(0,\ t,\ 0),\ L(0,\ 0,\ u)\ (s>0,\ t>0,\ u>0)$ とすると、

$$\begin{cases} MN^2=a^2=s^2+t^2 \\ NL^2=b^2=t^2+u^2 \\ LM^2=c^2=u^2+s^2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} s^2=\dfrac{1}{2}(c^2+a^2-b^2) \\ t^2=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \\ u^2=\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) \end{cases}$$

点 $A,\ B,\ C$ が重なった点が $R(s,\ t,\ u)$ となる。$MN=LR=a$ であり、$P,\ Q$ はそれぞれ $MN,\ LR$ の中点である。

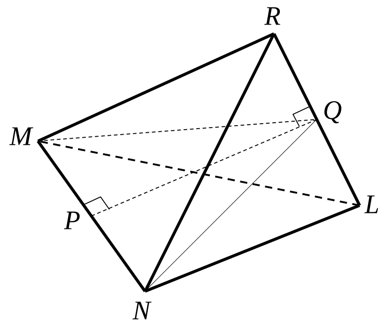
結局、PQ は u に等しく　$\therefore PQ=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$ ……(答)

(2)

求める体積は、直方体の体積 stu から、四面体 $OLMN$ の体積 $\dfrac{1}{6}stu$ を 4 つ分引いた値に等しく、

$$\therefore stu-4\times\frac{1}{6}stu=\frac{1}{3}stu=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2}} \quad \text{……(答)}$$

（解答 2）　等面四面体の性質に気付かない場合



(1)

点 $A,\ B,\ C$ が重なった点を R とし、$\overrightarrow{RL}=\vec{a},\ \overrightarrow{RM}=\vec{b},\ \overrightarrow{RN}=\vec{c}$ とする。

$\overrightarrow{RQ}=\dfrac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{RP}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ より、$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$

$$\begin{aligned} 4\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 &= (\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= a^2+b^2+c^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a} \end{aligned}$$

ここで、$\overrightarrow{LM}=\vec{b}-\vec{a}$ より

$$\left|\overrightarrow{LM}\right|^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=a^2+b^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=c^2 \quad \therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=a^2+b^2-c^2$$

同様に、$2\vec{b}\cdot\vec{c}=b^2+c^2-a^2,\ 2\vec{c}\cdot\vec{a}=c^2+a^2-b^2$ が導かれる。

$$4\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=a^2+b^2+c^2-(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)-(c^2+a^2-b^2)=2(b^2+c^2-a^2)$$

$$\therefore PQ=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}} \quad \text{……(答)}$$

(2)

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RL}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}(a^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a})=\frac{1}{2}\left\{a^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)-\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)\right\}=0$$

したがって $PQ\perp RL$ であり、対称性から $PQ\perp MN$ もわかる。

今、点 R から三角形 QMN に下した垂線の長さを考える。

$P(0,\ 0,\ 0),\ M\left(-\dfrac{a}{2},\ 0,\ 0\right),\ N\left(\dfrac{a}{2},\ 0,\ 0\right),\ Q(0,\ t,\ 0)$ と座標を置く。ここで、$t=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$ である。

$PQ\perp RL$ であることから、R の y 座標は t に等しく、$R(x,\ t,\ z)$ と置く。

$$\begin{cases} RQ^2=\dfrac{1}{4}a^2=x^2+z^2 \\ RM^2=b^2=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+t^2+z^2 \\ RN^2=c^2=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+t^2+z^2 \end{cases}$$

$$\therefore x=\frac{b^2-c^2}{2a}\qquad \therefore z^2=\frac{1}{4}a^2-x^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{(b^2-c^2)^2}{4a^2}=\frac{a^4-(b^2-c^2)^2}{4a^2}=\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}{4a^2}$$

点 R から三角形 QMN に下した垂線の長さは　$\therefore z=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)}}{2a}$

三角形 QMN の面積は $\dfrac{1}{2}at$ であるから、四面体 $RQMN$ の体積は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}at\cdot z=\dfrac{1}{6}atz$

求める体積はこの 2 倍であるから

$$\therefore \frac{1}{3}a\cdot\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)}}{2a}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2}}\quad\cdots\cdots(答)$$

※1993 年理系前期 $\boxed{1}$ と同様に、すべての面が合同な四面体は、直方体の 4 つの頂点を結ぶことにより得られることを知っていれば計算が大幅に楽になる。