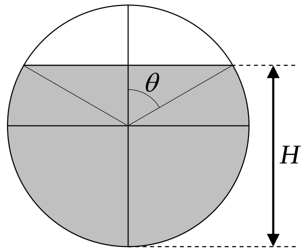
1996 年東大理後期 $\boxed{3}$

（解答 1）　三角関数の利用

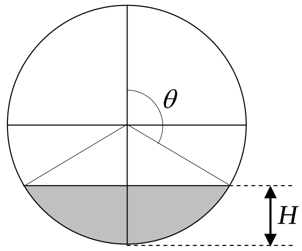
時刻 t におけるタンクに残っている石油の体積を V 、穴から測った油面の高さを H とする。
時刻 t の単位は（時間）、$t=0$ においてタンクは一杯であるとする。



条件により、$\dfrac{dV}{dt}=C\sqrt{H}$ ——① と書ける。

タンクの断面の半径を r 、高さを h とし、角 θ を図のように定義する。
このとき $0\leqq\theta\leqq\pi$ で、θ は時刻 t の関数である。H と θ の関係は

$$H=r(1+\cos\theta)=2r\cos^2\frac{\theta}{2}\quad\therefore\sqrt{H}=\sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2}\ \text{——②}$$



網掛け部の面積は $\dfrac{1}{2}r^2(2\pi-2\theta)+r^2\sin\theta\cos\theta=r^2\left(\pi-\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)$ で、

$$V=r^2h\left(\pi-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$\therefore\frac{dV}{dt}=r^2h(-1+\cos 2\theta)\cdot\frac{d\theta}{dt}=-2r^2h\sin^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=-8r^2h\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{d\theta}{dt}\ \text{——③}$$

②、③を①に代入すると

$$\frac{dV}{dt}=-8r^2h\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{d\theta}{dt}=C\sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2}\quad -4\sqrt{2}r^{\frac{3}{2}}h\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=Cdt$$

両辺積分して

$$-4\sqrt{2}r^{\frac{3}{2}}h\cdot\frac{2}{3}\sin^3\frac{\theta}{2}=Ct+D\quad -\frac{8\sqrt{2}}{3}r^{\frac{3}{2}}h\sin^3\frac{\theta}{2}=Ct+D$$

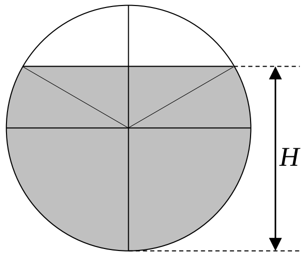
$t=0$ のとき $\theta=0$ より、$\therefore D=0$　$t=1$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ より、$\therefore C=-\dfrac{8\sqrt{2}}{3}r^{\frac{3}{2}}h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=-\dfrac{4}{3}r^{\frac{3}{2}}h$

$$-\frac{8\sqrt{2}}{3}r^{\frac{3}{2}}h\sin^3\frac{\theta}{2}=-\frac{4}{3}r^{\frac{3}{2}}ht\quad\therefore t=2\sqrt{2}\sin^3\frac{\theta}{2}$$

タンクが空になるとき $\theta=\pi$ であるから、$t=2\sqrt{2}$ 。
半分流出するまでの 1 時間を引いて、求める時間は $2\sqrt{2}-1$（時間）。
$1.414^2=1.999396$、$1.415^2=2.002225$ より $1.414<\sqrt{2}<1.415$ で、$1.828<2\sqrt{2}-1<1.83$
$0.828\times 60=49.68$、$0.83\times 60=49.8$ であるから、$\therefore$ 1 時間 49 分 ……（答）

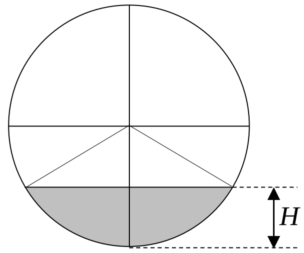
（解答 2）　三角関数を使わなくても解けます。

時刻tにおけるタンクに残っている石油の体積をV、穴から測った油面の高さをHとする。
時刻tの単位は(時間)、$t=0$においてタンクは一杯であるとする。



条件により、$\dfrac{dV}{dt}=C\sqrt{H}$ ——① と書ける。

タンクの断面の半径をr、高さをhとする。



網掛け部の面積は、積分を用いて$2\int_{-r}^{H-r}\sqrt{r^2-y^2}\,dy$と表せるから、

$$V=2h\int_{-r}^{H-r}\sqrt{r^2-y^2}\,dy \quad \therefore \frac{dV}{dt}=2h\sqrt{r^2-(H-r)^2}\,\frac{dH}{dt}=2h\sqrt{2rH-H^2}\,\frac{dH}{dt}$$

①より

$$\frac{dV}{dt}=2h\sqrt{2rH-H^2}\,\frac{dH}{dt}=C\sqrt{H} \quad \therefore \sqrt{2r-H}\,dH=\frac{C}{2h}dt$$

両辺積分して　$-\dfrac{2}{3}(2r-H)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{C}{2h}t+D$

$t=0$のとき$H=2r$より、$\therefore D=0$　$t=1$のとき$H=r$より、$\therefore \dfrac{C}{2h}=-\dfrac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}$

$$-\frac{2}{3}(2r-H)^{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}t \quad \therefore t=\left(2-\frac{H}{r}\right)^{\frac{3}{2}}$$

タンクが空になるとき$H=0$であるから、$t=2\sqrt{2}$。
半分流出するまでの 1 時間を引いて、求める時間は$2\sqrt{2}-1$(時間)。
$1.414^2=1.999396$、$1.415^2=2.002225$より$1.414<\sqrt{2}<1.415$で、$1.828<2\sqrt{2}-1<1.83$
$0.828\times60=49.68$、$0.83\times60=49.8$であるから、$\therefore$1 時間 49 分 ……(答)