1996 年東大理 $\boxed{1}$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$ であるから、$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおくと、

f は原点中心の θ 回転と大きさ $\sqrt{a^2+b^2}$ 倍の合成変換である。

C の中心 $(1,\ 0)$ は f によって $(a,\ b)$ に移る。C の像が領域 D に含まれるためには　$a>0$ ――①

C の像もまた円であり、半径は $\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}$ となる。C の像が $x=\dfrac{2}{3}$ に接するとき

$$\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2} = \left|a-\frac{2}{3}\right| \quad a^2+b^2 = 9\left(a-\frac{2}{3}\right)^2 = 9a^2-12a+4 \quad 8a^2-12a+4+b^2=0$$

$$8\left(a-\frac{3}{4}\right)^2 - b^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore 16\left(a-\frac{3}{4}\right)^2 - 2b^2 = 1 \text{ ――②}$$

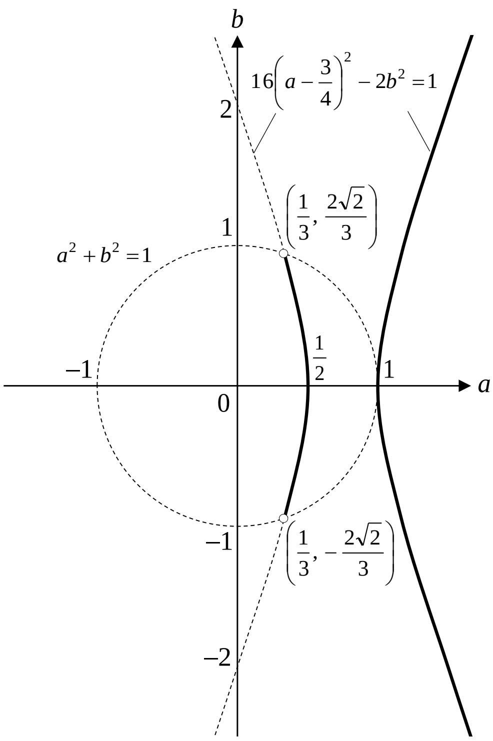
②は a 軸対称の双曲線である。$a>\dfrac{2}{3}$ であれば、C の像の半径に上限はない。

$a<\dfrac{2}{3}$ であるとき、C の像が領域 D に含まれるためには　$\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}<\dfrac{1}{3}$　$\therefore a^2+b^2<1$ ――③

双曲線 $16\left(a-\dfrac{3}{4}\right)^2-2b^2=1$ と円 $a^2+b^2=1$ の交点を求めると、$\dfrac{1}{3}=\left|a-\dfrac{2}{3}\right|$ より　$a-\dfrac{2}{3}=\pm\dfrac{1}{3}$　$a=\dfrac{1}{3},\ 1$

$a<\dfrac{2}{3}$ より　$\therefore a=\dfrac{1}{3}$　$b^2=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$　$\therefore b=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

以上①～③より、$(a,\ b)$ 全体がなす図形は、下図の実線部である。点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ を除く。



（注）

C の f による像は円であると見なして解答したが、きちんと論証すべきかもしれない。

C の f による像を計算して求めると、下記のようになる。

円 C の式は $(x-1)^2+y^2=\dfrac{1}{9}$ である。C 上の点 $(x,\ y)$ の f による像を、$(p,\ q)$ とすると

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

これより、$x=\dfrac{ap+bq}{a^2+b^2},\ y=\dfrac{-bp+aq}{a^2+b^2}$ を、C の式に代入すると

$$\frac{\left\{(ap+bq)-(a^2+b^2)\right\}^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{(-bp+aq)^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{1}{9}\qquad \left\{(ap+bq)-(a^2+b^2)\right\}^2+(-bp+aq)^2=\frac{1}{9}(a^2+b^2)^2$$

$$(ap+bq)^2+(-bp+aq)^2-2(a^2+b^2)(ap+bq)+(a^2+b^2)^2$$

$$=(a^2+b^2)(p^2+q^2)-2(a^2+b^2)(ap+bq)+(a^2+b^2)^2=\frac{1}{9}(a^2+b^2)^2$$

$$p^2+q^2-2(ap+bq)+(a^2+b^2)=\frac{1}{9}(a^2+b^2)\qquad \therefore (p-a)^2+(q-b)^2=\frac{1}{9}(a^2+b^2)$$

したがって、C の f による像は、中心 $(a,\ b)$、半径 $\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}$ の円である。